2.6. Рациональные уравнения

Уравнение, левая и правая части которого есть рациональные выражения относительно x, называют **рациональным уравнением с неизвестным** $\boldsymbol{x}$.

Например, уравнения $5x^6 - 9x^5 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$, $\dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 1} = 1 + x$ и $\dfrac{3x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \dfrac{5x^3 - 2}{x^4 + 3}$ являются рациональными.

Напомним, что **корнем** (или **решением**) уравнения с неизвестным x называют число, при подстановке которого в уравнение вместо x получается верное числовое равенство. Решить уравнение — значит найти все его корни или показать, что их нет.

При решении рациональных уравнений приходится умножать или делить обе части уравнения на не равное нулю число, переносить члены уравнения из одной части в другую, применять правила сложения и вычитания алгебраических дробей. В результате будет получаться уравнение, равносильное предшествующему, т. е. уравнение, имеющее те же корни, и только их.

Уравнение вида

$$A(x) \cdot B(x) = 0,$$

где $A(x)$ и $B(x)$ — многочлены относительно x, называют **распадающимся уравнением.**

Множество всех корней распадающегося уравнения есть объединение множеств всех корней двух уравнений $A(x) = 0$ и $B(x) = 0$.

ПРИМЕР 1. Решим уравнение

$$(x^2 - 5x + 6)(x^2 + x - 2) = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) распадается на два уравнения

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \qquad (2)$$

и

$$x^2 + x - 2 = 0. \qquad (3)$$

Уравнение (2) имеет корни $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$, а уравнение (3) имеет корни $x_3 = -2$ и $x_4 = 1$. Значит, уравнение (1) имеет корни $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -2$, $x_4 = 1$ и других корней не имеет.

Ответ. -2; 1; 2; 3.

Уравнение вида

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0, \qquad (4)$$

где $A(x)$ и $B(x)$ — многочлены относительно x, обычно решают по следующему правилу.

Находят корни уравнения $A(x) = 0$, затем проверяют, какие из них обращают в нуль и какие не обращают в нуль знаменатель $B(x)$. Те из них, которые не обращают в нуль знаменатель $B(x)$, и являются корнями уравнения (4), и других корней уравнение (4) не имеет.

ПРИМЕР 2. Решим уравнение

$$\frac{x^2 + 4x - 21}{x^2 - x - 6} = 0. \qquad (5)$$

Сначала решим уравнение

$$x^2 + 4x - 21 = 0. \qquad (6)$$

Оно имеет два корня $x_1 = 3$ и $x_2 = -7$. Подставив эти числа в знаменатель левой части уравнения (5), получим

$$x_1^2 - x_1 - 6 = 9 - 3 - 6 = 0,$$
$$x_2^2 - x_2 - 6 = 49 + 7 - 6 = 50 \neq 0.$$

Это показывает, что число $x_1 = 3$ не является корнем уравнения (5), а число $x_2 = -7$ — корень этого уравнения.

Ответ. -7.

Уравнение вида

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{C(x)}{D(x)}, \tag{7}$$

где $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ и $D(x)$ — многочлены относительно x, обычно решают по следующему правилу.

Переносят все члены уравнения в одну сторону:

$$\frac{A(x)}{B(x)} - \frac{C(x)}{D(x)} = 0. \tag{8}$$

Пользуясь правилом вычитания алгебраических дробей, переписывают уравнение (8) в виде

$$\frac{A(x) \cdot D(x) - C(x) \cdot B(x)}{B(x) \cdot D(x)} = 0. \tag{9}$$

Решают уравнение $A(x) \cdot D(x) - C(x) \cdot B(x) = 0$ и отбирают из его корней те, которые не обращают в нуль знаменатель уравнения (9). Они и только они и будут корнями уравнения (7).

ПРИМЕР 3. Решим уравнение

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = 2x + 3. \tag{10}$$

Перенеся все члены уравнения (10) в левую часть, получим уравнение

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} - \frac{2x + 3}{1} = 0. \tag{11}$$

Применяя правило вычитания алгебраических дробей, перепишем уравнение (11) в виде

$$\frac{x^2 - 5x + 6 - (2x + 3)(x - 3)}{x - 3} = 0.$$

Решим уравнение $x^2 - 5x + 6 - (2x + 3)(x - 3) = 0$.

Переписав это уравнение в виде $x^2 + 2x - 15 = 0$, найдем корни этого уравнения $x_1 = -5$ и $x_2 = 3$.

Число x_1 не обращает в нуль знаменатель $x - 3$, а число x_2 обращает. Следовательно, уравнение (10) имеет единственный корень $x = -5$.

Ответ. -5.

Замечание. Отклонение от сформулированного выше правила может привести к потере корней или к приобретению посторонних корней.

Найти корни рационального уравнения часто помогает замена неизвестного.

ПРИМЕР 4. Решим уравнение

$$x^8 + 4x^6 - 10x^4 + 4x^2 + 1 = 0. \qquad (12)$$

Число 0 не является корнем уравнения (12), поэтому уравнение (12) равносильно уравнению

$$x^4 + 4x^2 - 10 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^4} = 0. \qquad (13)$$

Обозначим $t = x^2 + \frac{1}{x^2}$, тогда $x^4 + \frac{1}{x^4} = t^2 - 2$ и уравнение (13) перепишется в виде

$$t^2 + 4t - 12 = 0. \qquad (14)$$

Уравнение (14) имеет два корня $x_1 = 2$ и $x_2 = -6$. Следовательно, все корни уравнения (14) найдем, объединив все корни двух уравнений:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 2 \quad \text{и} \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = -6.$$

Первое уравнение имеет два корня -1 и 1, а второе уравнение не имеет действительных корней, поэтому уравнение (12) имеет только два корня: -1 и 1.

Ответ. -1; 1. ●

Замечание. Уравнения, подобные рассмотренному в примере 4, называют **возвратными**. Их характерной особенностью является совпадение коэффициентов при слагаемых, сумма степеней которых равна степени многочлена. Так, в разобранном примере равны коэффициенты при x^8 и x^0, x^7 и x, x^6 и x^2, x^5 и x^3. Во всех подобных случаях замена переменной $t = x + \frac{1}{x}$ или $t = x^2 + \frac{1}{x^2}$ (как в примере 4) упрощает решение уравнения.

2.44° а) Какое уравнение называют рациональным уравнением с неизвестным x?

б) Что называют корнем уравнения с неизвестным x?

в) Что значит решить уравнение?

г) Как решают распадающиеся уравнения?

д) Как решают уравнения вида $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$, где $A(x)$ и $B(x)$ — многочлены относительно x?

Решите уравнение **(2.45—2.48)**:

2.45 а) $(x + 1)(2x - 3) = 0$; б) $(3x + 1)(x - 2) = 0$;

в) $(x^2 - 1)(x + 3) = 0$; г) $(x^2 - 4)(x + 1) = 0$.

2.46 а) $(x^2 - 7x + 10)(x^2 - 5x + 6) = 0$;

б) $(x^2 - x - 6)(x^2 + 2x - 15) = 0$;

в) $x^6 - 1 = 0$; г) $x^8 - 1 = 0$.

2.47 а) $\dfrac{x^2 - 5x}{2x + 1} = 0$; б) $\dfrac{x^2 + 4x}{2x + x^2} = 0$;

в) $\dfrac{x^2 - 5x}{2x - 6} = 1$; г) $\dfrac{x^2 + 17x + 72}{x + 9} = -1$.

2.48 а) $\dfrac{60}{20 + x} + \dfrac{60}{20 - x} = \dfrac{25}{4}$; б) $\dfrac{1}{5 - x} + \dfrac{90}{25 - x^2} = \dfrac{4 - x}{5 + x}$;

в) $\dfrac{3}{x^2 - 2x + 1} + \dfrac{2}{1 - x^2} = \dfrac{1}{x + 1}$; г) $\dfrac{2}{x^2 + 12x + 36} - \dfrac{12}{36 - x^2} = \dfrac{1}{x - 6}$.

Решите уравнение, используя замену неизвестного **(2.49—2.50):**

2.49* а) $(x + 100)^2 - 2004(x + 100) - 2005 = 0$;

б) $(x^2 - x)^2 - 3(x^2 - x) + 2 = 0$;

в) $(x^2 - 2x)^2 - 2(x - 1)^2 - 1 = 0$;

г) $(x^2 - 10x)^2 + 8(x - 5)^2 - 209 = 0$;

д) $\left(\dfrac{3x - 1}{x + 1}\right)^2 - \dfrac{27x - 9}{x + 1} + 14 = 0$; е) $3 \cdot \left(\dfrac{2x - 3}{x + 1}\right)^2 - \dfrac{44x - 66}{x + 1} + 7 = 0$;

ж) $\dfrac{x + 1}{x - 1} + \dfrac{6x - 6}{x + 1} - 5 = 0$; з) $\dfrac{28x - 70}{3x + 1} - \dfrac{21x + 7}{2x - 5} - 47 = 0$.

2.50* а) $2x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 5x + 2 = 0$; б) $3x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 7x + 3 = 0$;

в) $2x^8 - 3x^6 - x^4 - 3x^2 + 2 = 0$; г) $5x^8 - 4x^6 - 2x^4 - 4x^2 + 1 = 0$.

Из сборника задач П. А. Ларичева. Решите уравнение **(2.51—2.52):**

2.51 а) $\dfrac{x}{x + 1} + \dfrac{x}{x - 1} = 2\dfrac{2}{3}$; б) $\dfrac{x}{x + 4} + \dfrac{x}{x - 4} = 5\dfrac{5}{9}$;

в) $\dfrac{x + 3}{x - 3} + \dfrac{x - 3}{x + 3} = 3\dfrac{1}{3}$; г) $\dfrac{5x + 7}{x - 2} - \dfrac{2x + 21}{x + 2} = 8\dfrac{2}{3}$.

2.52* а) $\dfrac{x}{x + a} + \dfrac{x}{x - a} = 2\dfrac{2}{3}$ б) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{1}{ax - bx} + \dfrac{b}{a^2x - abx} = \dfrac{2}{a - b}$;

в) $\dfrac{2x}{x - b} + \dfrac{12x^2}{b^2 - x^2} = \dfrac{b - x}{x + b}$; г) $\dfrac{x + a}{x - a} + \dfrac{x - a}{x + a} = \dfrac{a(3x + 2a)}{x^2 - a^2}$,

где a и b — данные числа.

Решите уравнение (**2.53—2.55**):

2.53 а) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$; б) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$;

в) $x^3 - 2x - 4 = 0$; г) $x^3 - 6x - 9 = 0$;

д) $x^4 + x^3 + 5x^2 + 4x + 4 = 0$; е) $x^5 + 3x^3 + 2x = 0$.

2.54 а) $2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$; б) $3x^3 - x^2 - 12x + 4 = 0$;

в) $3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - x + 1 = 0$; г) $x^4 - 4x^3 + 12x - 9 = 0$;

д) $2x^4 + 2x^3 + 5x^2 + x + 2 = 0$; е) $x^4 - 3x^3 + 6x - 4 = 0$.

2.55 а) $\dfrac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x - 2} = 0$; б) $\dfrac{x^3 - 7x + 6}{x^2 + x - 6} = 0$;

в) $\dfrac{2x^3 - 3x^2 - 11x + 6}{2x^3 - x^2 + 2x - 1} = 0$; г) $\dfrac{3x^3 + 4x^2 - 5x - 2}{3x^3 + 4x^2 - 5x + 2} = 0$.