2.3*. Деление многочленов с остатком. Алгоритм Евклида

Рассмотрим многочлены относительно одной переменной x, т. е. многочлены вида

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0, \qquad (1)$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — данные числа, называемые коэффициентами многочлена (1), коэффициент a_n называют коэффициентом при старшем члене, а коэффициент a_0 — свободным членом. Если $a_n \neq 0$, то многочлен (1) называют многочленом степени n.

Например, коэффициенты многочлена $5x^3 + 4x^2 - 2x + 7$ равны 5, 4, –2 и 7, коэффициент при старшем члене равен 5, свободный член равен 7, степень многочлена равна 3.

Если все коэффициенты многочлена равны нулю, то этот многочлен есть нулевой многочлен (его степень не определяется).

Разделить многочлен A на многочлен B с остатком — значит найти многочлены Q и R, такие, что выполняется равенство $A = Q \cdot B + R$, причем либо степень многочлена R меньше степени многочлена B, либо R — нулевой многочлен. Многочлен Q называют частным (неполным частным), многочлен R — остатком. Если R есть нулевой многочлен, то многочлен A делится на многочлен B нацело и многочлен B называют делителем многочлена A.

Многочлен нулевой степени есть число, отличное от нуля. Любое число, отличное от нуля, можно рассматривать как делитель любого многочлена. Например, число $\frac{1}{7}$ есть делитель многочлена $x^2 + 2x + 3$, потому что $x^2 + 2x + 3 = \frac{1}{7}(7x^2 + 14x + 21)$.

Деление с остатком многочлена A на ненулевой многочлен B обычно выполняют уголком. Покажем, как это делается, на примерах.

ПРИМЕР 1. Разделим многочлен $2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 5$ на многочлен $x^2 - 3x + 1$:

$$\begin{array}{l|l}
2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 5 & x^2 - 3x + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{2x^4 - 6x^3 + 2x^2} & 2x^2 + 3x + 9 \\
\qquad 3x^3 + 0x^2 - 7x & \\
\qquad \underline{3x^3 - 9x^2 + 3x} & \\
\qquad\qquad 9x^2 - 10x + 5 & \\
\qquad\qquad \underline{9x^2 - 27x + 9} & \\
\qquad\qquad\qquad 17x - 4 &
\end{array}$$

Итак, $2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 5 = (2x^2 + 3x + 9)(x^2 - 3x + 1) + 17x - 4$.

При делении многочлена $2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 5$ на многочлен $x^2 - 3x + 1$ получено неполное частное $2x^2 + 3x + 9$ и остаток $17x - 4$.

ПРИМЕР 2. Разделим многочлен $x^5 - 7x^3 - 12x + 18$ на многочлен $x^3 - 2x^2 - 6$:

$$\begin{array}{l|l}
x^5 + 0x^4 - 7x^3 + 0x^2 - 12x + 18 & x^3 - 2x^2 + 0x - 6 \\ \cline{2-2}
\underline{x^5 - 2x^4 + 0x^3 - 6x^2} & x^2 + 2x - 3 \\
\qquad 2x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 12x & \\
\qquad \underline{2x^4 - 4x^3 + 0x^2 - 12x} & \\
\qquad\qquad -3x^3 + 6x^2 + 0x + 18 & \\
\qquad\qquad \underline{-3x^3 + 6x^2 + 0x + 18} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Итак, $x^5 - 7x^3 - 12x + 18 = (x^3 - 2x^2 - 6)(x^2 + 2x - 3)$. Многочлен $x^5 - 7x^3 - 12x + 18$ разделился на многочлен $x^3 - 2x^2 - 6$ нацело, получено частное $x^2 + 2x - 3$ и остаток — нулевой многочлен.

Пусть даны два многочлена:

$$A = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$
$$B = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

относительно x, причем $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$ и $n \geqslant m \geqslant 1$.

Наибольшим общим делителем многочленов A и B называют многочлен наибольшей степени $k \leqslant m$, на который делятся нацело и многочлен A, и многочлен B. Наибольший общий делитель многочленов A и B обозначают НОД (A, B). Запись НОД $(A, B) = 1$ означает, что наибольший общий делитель многочленов A и B есть единица, но тогда и любое действительное число, отличное от нуля (любая константа, отличная от нуля), т. е. любой многочлен степени 0, также есть наибольший общий делитель многочленов A и B.

Если многочлен A делится на многочлен B нацело, т. е. $A = Q \cdot B$, то НОД $(A, B) = B$. Если же A не делится на B нацело, то разделим с остатком многочлен A на многочлен B:

$$A = Q_1 \cdot B + R_1,$$

где степень остатка R_1 меньше степени многочлена B (R_1 — ненулевой многочлен). Теперь разделим B на R_1:

$$B = Q_2 \cdot R_1 + R_2,$$

где либо степень остатка R_2 меньше степени многочлена R_1, либо R_2 — нулевой многочлен. Если R_2 — нулевой многочлен, то НОД $(A, B) = R_1$. Если R_2 — ненулевой многочлен, то продолжим процесс последовательного деления многочленов с остатком. Этот процесс конечен, так как степени многочленов $R_1, R_2, \ldots, R_{k-1}$ строго убывают. В результате на k-м шаге получим систему равенств:

$$\left\{\begin{array}{ll} A & = Q_1 \cdot B + R_1 \\ B & = Q_2 \cdot R_1 + R_2 \\ R_1 & = Q_3 \cdot R_2 + R_3 \\ \multicolumn{2}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ R_{k-3} & = Q_{k-1} \cdot R_{k-2} + R_{k-1} \\ R_{k-2} & = Q_k \cdot R_{k-1}. \end{array}\right. \qquad (2)$$

Просматривая цепочку равенств (2) снизу вверх, находим, что R_{k-1} является делителем многочленов A и B. Больше того, R_{k-1} есть наибольший общий делитель многочленов A и B, так как если просматривать цепочку равенств сверху вниз, то окажется, что любой делитель многочленов A и B является делителем R_{k-1}. Следовательно, НОД $(A, B) = R_{k-1}$.

Проведенный процесс называют **алгоритмом Евклида** для многочленов, его используют для нахождения наибольшего общего делителя двух многочленов.

НОД (A, B) есть последний неравный нулю остаток в алгоритме Евклида.

ПРИМЕР 3. Найдем наибольший общий делитель многочленов $A = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ и $B = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$.

Применим алгоритм Евклида:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 + 3x + 2 & x^3 + 2x^2 + 2x + 1 \\ \cline{2-2} \underline{x^3 + 2x^2 + 2x + 2} & 1 \\ x^2 + x + 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 + 2x + 1 & x^2 + x + 1 \\ \cline{2-2} \underline{x^3 + x^2 + x\phantom{{}+1}} & x + 1 \\ x^2 + x + 1 & \\ \underline{x^2 + x + 1} & \\ 0 & \end{array}$$

Здесь вместо записи равенств (2) применена более короткая запись.

Искомый наибольший общий делитель данных многочленов есть последний неравный нулевому многочлену остаток в алгоритме Евклида, т. е.

$$\text{НОД}\,(A,\ B) = x^2 + x + 1.$$

ПРИМЕР 4. Найдем наибольший общий делитель многочленов $A = x^2 - x - 3$ и $B = x + 1$.

Применим алгоритм Евклида:

$$\begin{array}{r|l}
x^2 - x - 3 & x + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^2 + x\phantom{{}-3}} & x - 2 \\
-2x - 3 & \\
\underline{-2x - 2} & \\
-1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
x + 1 & -1 \\ \cline{2-2}
\underline{x + 1} & -x - 1 \\
0 &
\end{array}$$

Мы получили, что НОД $(A,\ B) = -1$, но тогда наибольший общий делитель многочленов A и B есть любое действительное отличное от нуля число. Принято писать, что НОД $(A,\ B) = 1$.

Разделите уголком многочлен A на многочлен B **(2.27—2.28)**, если:

2.27 а) $A = x^3 - x^2 + x + 3$, $\quad B = x^2 - 2x + 3$;
б) $A = x^3 + x^2 + 3x - 5$, $\quad B = x^2 + 2x + 5$;
в) $A = x^4 - 2x^3 + x^2 + 8x - 20$, $\quad B = x^2 - 4$.

2.28 а) $A = x^5 - 1$, $\quad B = x^3 - 1$;
б) $A = x^7 - 1$, $\quad B = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

2.29 Найдите НОД $(A,\ B)$, если:
а) $A = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$, $\quad B = x^3 - x^2 + 1$;
б) $A = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$, $\quad B = x^3 - 1$;
в) $A = x^5 - x^4 - x^3 - 2x^2 - x$, $\quad B = x^5 - x^4 + x^3 - x$;
г) $A = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x$, $\quad B = x^2 - 4x + 3$.

2.30 Сократите дробь:
а) $\dfrac{x^3 - x^2 + x + 3}{x^2 - 2x + 3}$; $\quad$ б) $\dfrac{x^3 + x^2 + 3x - 5}{x^2 + 2x + 5}$;
в) $\dfrac{x^3 - 1}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$; $\quad$ г) $\dfrac{x^3 + 8}{x^3 - 4x^2 + 8x - 8}$.

2.31 Докажите, что дробь несократима:
а) $\dfrac{x^4 + 1}{x^3 + 1}$; $\quad$ б) $\dfrac{x^3 + 9}{x^2 - 1}$.

2.32 Найдите многочлен A, для которого верно равенство:
а) $x^{12} - 1 = (x^4 - 1) \cdot A$; $\quad$ б) $x^{12} - 1 = (x^2 + 1) \cdot A$;
в) $x^{12} - 1 = (x^2 - 1) \cdot A$; $\quad$ г) $x^{12} - 1 = (x + 1) \cdot A$;
д) $x^{12} - 1 = (x - 1) \cdot A$; $\quad$ е) $x^5 - 32 = (x - 2) \cdot A$;
ж) $x^6 - 64 = (x - 2) \cdot A$; $\quad$ з) $x^7 - 128 = (x - 2) \cdot A$.