

Департамент образования г. Москвы
Московский институт открытого образования
Примерные задания школьного тура математической
олимпиады, октябрь 2009
7 класс

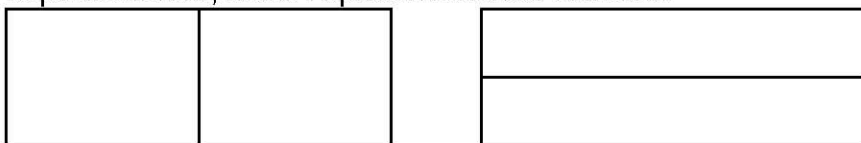
1. Разделите 25 рублей на две части так, чтобы одна часть была больше другой в 49 раз.

Ответ: 50 коп. и 24 руб 50 коп.

$$x + 49x = 25 \Rightarrow 50x = 25 \Rightarrow x = 0,5$$

2. Катя и Кирилл разрезали два одинаковых прямоугольника. У Кати получилось два прямоугольника каждый периметром 40 см, а у Кирилла – два прямоугольника каждый периметром 50 см. Какой периметр имели первоначальные прямоугольники?

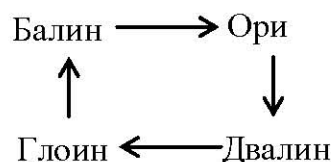
Ответ: 60 см. Разрезать прямоугольник на два прямоугольника можно либо вертикальной, либо горизонтальной линией.



Так как периметры одинаковы, то линия разреза в каждом случае проходит посередине. Если стороны исходного прямоугольника x и y , то стороны получившихся прямоугольников при одном разрезе будут x и $y/2$, а при другом – $x/2$ и y . А периметры соответственно $2x + y$ и $x + 2y$. Сложим: $(2x + y) + (x + 2y) = 50 + 40 = 90$, откуда $x + y = 30$, т.е. периметр исходного прямоугольника 60 см.

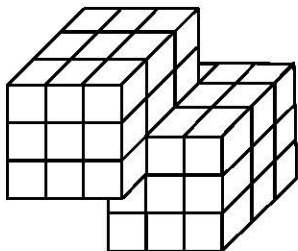
3. Каждый из пятерых гномов либо всегда говорит правду, либо всегда врет. Между ними произошел такой разговор. Балин: «Ори — врун!» Ори: «Двалин — врун!» Двалин: «Глойн — врун!» Глойн: «Балин — врун!» Дори (обращаясь к остальным): «Все вы вруны!». Определите сколько врунов среди гномов — ни одного, один, два, три, четыре или все пять? Не забудьте объяснить ответ.

Ответ: Трое. Заметим, что четыре гнома высказываются друг о друге «по кругу» - см. рис. Если Балин — правдолюб, то Ори — лжец, тогда Двалин — правдолюб и значит Глойн — лжец. Если же Балин лжец, то Ори правдолюб, Двалин — лжец, Глойн —

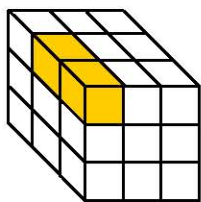


правдолюб. Стало быть, лжецы и правдолюбыв в этом круге чередуются, то есть в любом случае там два лжеца. Третий лжец — Дори: ведь правдолюб в круге два.

4. У Феи было много одинаковых кубиков с ребром 1. Он склеил из них фигуру, изображенную на рисунке (фигура состоит из двух кубов с ребром 3, которые имеют два общих кубика с ребром 1). Из скольких квадратиков со стороной 1 состоит поверхность такой фигуры?



Ответ: 98. Посчитаем количество квадратиков на поверхности двух отдельно взятых кубов 3×3 . На одной грани куба 9 квадратиков, поэтому на поверхности одного куба — $9 \cdot 6 = 54$ квадратика. На поверхности двух $54 \cdot 2 = 108$. Так как кубы имеют два общих кубика, то на поверхности каждого куба не видно по 5 квадратиков. Итого $108 - 10 = 98$ квадратиков.



5. На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 10. Разрешается выбрать любое нецелое число a и ко всем числам, меньшим a , прибавить 1, а из всех чисел, больших a , вычесть 1. Можно ли несколькими такими операциями получить: а) Только единички и двойки? б) Только единички и тройки?

Ответы: а) Да. б) Нет.

Заметим, что каждая из данных операций меняет четность всех написанных чисел. Поэтому среди них как было в начале по пять четных и нечетных, так всегда и будет. Стало быть, только единички и тройки получить нельзя. Покажем, как получить только единички и двойки. Вначале возьмем a из промежутка между вторым и третьим числом (например $a = 2,5$). Получим числа 2, 3, 2, 3, 4, ..., 9. Затем возьмем a из промежутка между четвертым и пятым числом. Получим числа 3, 4, 3, 4, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Далее возьмем a из промежутка между шестым и седьмым, а затем между восьмым и девятым числом. Получим: 4, 5, 4, 5, 4, 5, 4, 5, 6, 7 и 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6 соответственно. Осталось уменьшить эти числа до 1 и 2. Для этого возьмем число $a = 0,5$ еще 4 раза.