

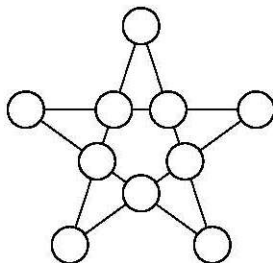
1. Существуют ли натуральные числа m и n , для которых верно равенство: $(-2a^n b^n)^m + (3a^m b^m)^n = a^6 b^6$? Ответ объясните.

2. По данным опроса, проведенного в 7 «Е» классе, выяснилось, что **20%** учеников, интересующихся математикой, интересуются еще и физикой, а **25%** учеников, интересующихся физикой, интересуются также и математикой. И только Пете с Васей не интересен ни один из этих предметов. Сколько человек в 7 «Е», если известно, что их больше **20**, но меньше **30**?

3. Новогодняя гирлянда, висящая вдоль школьного коридора, состоит из красных и синих лампочек. Рядом с каждой красной лампочкой обязательно есть синяя. Какое наибольшее количество красных лампочек может быть в этой гирлянде, если всего лампочек **50**?

4. В треугольнике ABC на стороне AC отмечены точки D и E , так что $AD = DE = EC$. Может ли оказаться так, что $\angle ABD = \angle DBE = \angle EBC$?

5. Можно ли в кружочки на пятиконечной звезде (см. рисунок) расставить **4** единицы, **3** двойки и **3** тройки так, чтобы суммы четырех чисел, стоящих на каждой из пяти прямых, были равны?



Математический праздник (городской тур олимпиады для 7 классов) пройдет в МГУ им. М.В.Ломоносова 17.02.2008. Начало в 10.00.

Подробную информацию смотрите на сайте <http://www.mccme.ru/matprazdnik/>

Математические кружки для 7 классов проводятся в ЦО №218 (филиал Малого Мехмата, м. Тимирязевская) и в МЦНМО (м. Смоленская). Подробную информацию смотрите на сайтах:

<http://mmmf.math.msu.su> и <http://www.mccme.ru/circles/mccme/>

7 класс

1. Существуют ли натуральные числа m и n , для которых верно равенство: $(-2a^n b^n)^m + (3a^m b^m)^n = a^6 b^6$? Ответ объясните.

Ответ: да, существуют: $m = 3, n = 2$.

Действительно, при $m = 3, n = 2$, $(-2a^n b^n)^m + (3a^m b^m)^n = (-2a^2 b^2)^3 + (3a^3 b^3)^2 = -8a^6 b^6 + 9a^6 b^6 = a^6 b^6$.

Можно доказать, что приведенный ответ — единственный (от учащихся это не требуется).

Преобразуем левую часть данного равенства:

$$(-2a^n b^n)^m + (3a^m b^m)^n = (-2)^m a^{mn} b^{mn} + 3^n a^{mn} b^{mn} = ((-2)^m + 3^n) a^{mn} b^{mn}.$$

Для того, чтобы исходное равенство было верным, необходимо, чтобы $mn = 6$ и $(-2)^m + 3^n = 1$. При любых натуральных n $3^n > 1$, поэтому $(-2)^m < 0$. Следовательно, m — нечетное число. У числа 6 есть только два натуральных нечетных делителя: 1 и 3. Значит, возможны два случая: $m = 1, n = 6$ или $m = 3, n = 2$. Проверкой убеждаемся, что в первом случае равенство не выполняется, а во втором — выполняется.

+ верное обоснованное решение

± верно приведены значения m и n , но не приведены выкладки, показывающие, что при указанных значениях переменных равенство выполняется

— приведен только ответ «да»

2. По данным опроса, проведенного в 7 «Е» классе, выяснилось, что 20% учеников, интересующихся математикой, интересуются еще и физикой, а 25% учеников, интересующихся физикой, интересуются также и математикой. И только Пете с Васей не интересен ни один из этих предметов. Сколько человек в 7 «Е», если известно, что их больше 20, но меньше 30?

Ответ: 26.

Количество человек в 7 «Е» без учета Пети и Васи превышает 18, но меньше, чем 28. Пусть x учеников класса интересуются одновременно и математикой, и физикой. Тогда всего математикой интересуются $5x$ учеников, а физикой — $4x$ учеников. Значит, математикой или физикой интересуются $5x + 4x - x = 8x$ учеников (см. рис. 7.2). Таким образом, количество учеников в классе должно делиться на 8. В указанных границах есть только одно число, кратное восьми. Следовательно, $8x = 24$, а всего в классе — 26 человек.

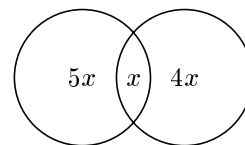


Рис. 7.2

+ верное обоснованное решение

+ /2 приведен верный ответ, показано, что он удовлетворяет условию, но не доказана его единственность

± приведен только верный ответ

3. Новогодняя гирлянда, висящая вдоль школьного коридора, состоит из красных и синих лампочек. Рядом с каждой красной лампочкой обязательно есть синяя. Какое наибольшее количество красных лампочек может быть в этой гирлянде, если всего лампочек 50?

Ответ: 33.

Подсчитаем, какое наименьшее количество синих лампочек может быть в гирлянде. Поскольку рядом с любой красной лампочкой обязательно есть синяя, то три красных лампочки не могут идти подряд. Следовательно, среди каждых трех последовательно идущих лампочек хотя бы одна лампочка должна быть синей. Тогда среди первых 48 лампочек синих будет не меньше, чем $48 : 3 = 16$.

Обе лампочки с номерами 49 и 50 оказаться красными не могут, значит хотя бы одна из них — синяя. Получается, что синих лампочек в гирлянде должно быть не менее 17, тогда красных — не более 33.

Такой случай возможен: если лампочки с номерами 2, 5, 8, 11, ..., 50 — синие, а остальные — красные, то в гирлянде — 17 синих лампочек и 33 красных.

Следовательно, наибольшее возможное количество красных лампочек равно 33.

+ верное обоснованное решение

+ /2 приведен верный ответ и пример такой гирлянды

+ /2 доказано, что красных лампочек не более 33, но пример не приведен

± приведен только верный ответ

4. В треугольнике ABC на стороне AC отмечены точки D и E , так что $AD = DE = EC$. Может ли оказаться так, что $\angle ABD = \angle DBE = \angle EBC$?

Ответ: нет, не может.

Предположим, что такое возможно (см. рис. 7.4). Рассмотрим треугольник ABE : по условию, BD — его медиана. Если $\angle ABD = \angle DBE$, то BD является также и биссектрисой этого треугольника, поэтому, $\triangle ABE$ — равнобедренный с основанием AE , и BD — его высота. Аналогично, BE — медиана и биссектриса треугольника DBC , следовательно, $\triangle DBC$ — равнобедренный с основанием DC , и BE — его высота.

Таким образом, из точки B опущено два различных перпендикуляра BD и BE на прямую AC , что противоречит теореме о единственности перпендикуляра к прямой.

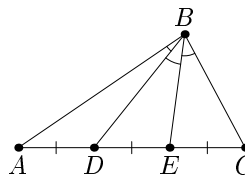


Рис. 7.4

+ верное обоснованное решение

± верный ответ основан на утверждении о равенстве треугольников ABD , DBE и EBC , которое не доказано

— приведен только ответ

5. Можно ли в кружочки на пятиконечной звезде (см. рисунок) расставить 4 единицы, 3 двойки и 3 тройки так, чтобы суммы четырех чисел, стоящих на каждой из пяти прямых, были равны?

Ответ: нет, нельзя.

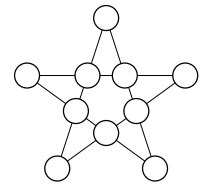
Предположим, что числа удалось расставить требуемым образом. Пусть S — сумма чисел, стоящих на каждой прямой, тогда сумма чисел на всех пяти прямых равна $5S$.

Так как каждый кружок лежит на пересечении двух прямых, то при таком подсчете число, записанное в каждом из кружочков, учтено дважды. Следовательно, найденная сумма равна удвоенной сумме всех расставленных чисел, то есть, $5S = 2(4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3)$. Получим, что $5S = 38$, что невозможно, так как на каждой прямой стоят 4 целых числа и их сумма должна быть целой.

+ *верное обоснованное решение*

± *верный ход решения и верный ответ, но допущена вычислительная ошибка*

— *приведен только ответ*



5. Можно ли в кружочки на пятиконечной звезде (см. рисунок) расставить 4 единицы, 3 двойки и 3 тройки так, чтобы суммы четырех чисел, стоящих на каждой из пяти прямых, были равны?

Ответ: нет, нельзя.

Предположим, что числа удалось расставить требуемым образом. Пусть S — сумма чисел, стоящих на каждой прямой, тогда сумма чисел на всех пяти прямых равна $5S$.

Так как каждый кружок лежит на пересечении двух прямых, то при таком подсчете число, записанное в каждом из кружочков, учтено дважды. Следовательно, найденная сумма равна удвоенной сумме всех расставленных чисел, то есть, $5S = 2(4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3)$. Получим, что $5S = 38$, что невозможно, так как на каждой прямой стоят 4 целых числа и их сумма должна быть целой.

+ *верное обоснованное решение*

± *верный ход решения и верный ответ, но допущена вычислительная ошибка*

— *приведен только ответ*

