2.5*. Корень многочлена

Число a называют **корнем многочлена $P_n(x)$**, если при $x = a$ значение многочлена $P_n(x)$ равно нулю: $P_n(a) = 0$, т. е. если многочлен $P_n(x)$ делится нацело на двучлен $x - a$.

Например, число 2 является корнем многочлена $P_3(x) = 3x^3 - 2x - 20$, так как $P_3(2) = 0$. Это означает, что разложение этого многочлена на множители содержит множитель $x - 2$ (см. пример 1 из п. 2.4):

$$P_3(x) = (x - 2)(3x^2 + 6x + 10).$$

Любой многочлен $P_n(x)$ степени $n \geqslant 1$ может иметь не более n действительных корней.

ПРИМЕРЫ.

1) Так как многочлен $P_2(x) = 3x^2 + 6x + 10 = 3(x + 3)^2 + 7 > 0$ для любого x, то этот многочлен не имеет действительных корней.

2) Многочлен $P_3(x) = 3x^3 - 24$ имеет только один действительный корень $x = 2$.

3) Многочлен $Q_2(x) = x^2 - 5x + 6$ имеет два действительных корня: $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$.

ТЕОРЕМА 1. Если все коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ($a_n \neq 0$) многочлена

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad (1)$$

целые числа и рациональное число $\frac{p}{q}$ $\left(\frac{p}{q}\right.$ — несократимая дробь, $\left.p \in Z,\ q \in N\right)$ является корнем многочлена, то коэффициент a_0 делится на p, а коэффициент a_n делится на q.

Доказательство. Пусть рациональное число $\frac{p}{q}$ $\left(\frac{p}{q}\right.$ — несократимая дробь, $\left.p \in Z,\ q \in N\right)$ есть корень многочлена $P_n(x)$, т. е. пусть справедливо числовое равенство

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0. \qquad (2)$$

Умножим равенство (2) на q^n:

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0. \qquad (3)$$

Все слагаемые в левой части равенства (3) — целые числа. Их сумма, а также сумма всех слагаемых, кроме последнего, делятся на p, следовательно, последнее слагаемое a_0q^n делится на p, но тогда a_0 делится на p, так как q^n не делится на p и числа p и q не имеют общих делителей, отличных от 1. Сумма всех слагаемых, а также сумма всех слагаемых, кроме первого, делятся на q, следовательно, первое слагаемое $a_n p^n$ делится на q, но тогда a_n делится на q, так как p^n не делится на q, что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 1. Выясним, какие рациональные корни имеет многочлен

$$P_3(x) = 6x^3 + 7x^2 - 9x + 2. \qquad (4)$$

Пусть рациональное число $\frac{p}{q}$ $\left(\frac{p}{q}\right.$ — несократимая дробь, $p \in Z$, $\left.q \in N\right)$ есть корень многочлена $P_3(x)$. Тогда на основании теоремы 1 можно заключить, что $a_0 = 2$ делится на p, а $a_3 = 6$ делится на q. Значит, p равно одному из чисел 1, –1, 2, –2, а q равно одному из чисел 1, 2, 3, 6. Это означает, что если у многочлена (4) есть корень — рациональное число, то этот корень содержится среди чисел

$$1,\ -1,\ 2,\ -2,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1}{6},\ -\frac{1}{6}.$$

Выясним, какие из этих 12 чисел являются корнями многочлена (4):

$$P_3(1) = 6 \cdot 1^3 + 7 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 + 2 \neq 0,$$
$$P_3(-1) = 6 \cdot (-1)^3 + 7 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) + 2 \neq 0,$$
$$P_3(2) = 6 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 + 2 \neq 0,$$
$$P_3(-2) = 6 \cdot (-2)^3 + 7 \cdot (-2)^2 - 9 \cdot (-2) + 2 = 0,$$

следовательно, числа 1, –1, 2 не являются корнями многочлена $P_3(x)$, а число –2 является корнем этого многочлена.

Поиск остальных рациональных корней многочлена $P_3(x)$ можно продолжить, подставляя оставшиеся восемь чисел в этот многочлен, но лучше разложить этот многочлен на множители:

$$P_3(x) = 6x^3 + 7x^2 - 9x + 2 = (x + 2)(6x^2 - 5x + 1).$$

Многочлен $P_2(x) = 6x^2 - 5x + 1$ имеет корни $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$, следовательно, многочлен $P_3(x)$ имеет корни -2, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и других корней не имеет.

Ответ. -2; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть коэффициент a_n многочлена с целыми коэффициентами

$$P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

равен 1, тогда если этот многочлен имеет корень — рациональное число, то этот корень — целое число и является делителем свободного члена a_0.

Доказательство. Пусть многочлен

$$P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

имеет корень — рациональное число $\frac{p}{q}$ $\left(\frac{p}{q}\right.$ — несократимая дробь, $\left.p \in \boldsymbol{Z},\ q \in \boldsymbol{N}\right)$. На основании теоремы 1 можно заключить, что коэффициент a_n, равный 1, делится на q и свободный член a_0 делится на p. Но тогда $q = 1$, т. е. корень есть целое число p и оно является делителем свободного члена a_0, что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 2. Выясним, какие рациональные корни имеет многочлен $P_4(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1$.

Коэффициент a_4 этого многочлена равен 1, следовательно, если многочлен $P_4(x)$ имеет корни — рациональные числа, то эти числа целые и они являются делителями свободного члена 1, т. е. рациональные корни многочлена $P_4(x)$ следует искать среди чисел 1 и –1. Вычислим $P_4(1)$ и $P_4(-1)$:

$$P_4(1) = 1^4 - 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 0,$$
$$P_4(-1) = (-1)^4 - (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 1 = 8 \neq 0.$$

Следовательно, многочлен $P_4(x)$ имеет единственный рациональный корень — число 1.

Ответ. 1.

Умение находить рациональные корни многочлена $P_n(x)$ с целыми коэффициентами помогает решать уравнения вида $P_n(x) = 0$.

Подводя итоги, получаем, что

$$P_5(x) = (x-1)^2(x+2)(x-x_1)(x-x_2).$$

Поэтому уравнение (5) имеет корни:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},\ x_3 = 1,\ x_4 = -2.$$

Очевидно, что других корней оно не имеет.

Ответ. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; 1; –2.

ПРИМЕР 4. Решим уравнение

$$x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{9} = 0. \qquad (6)$$

Умножая обе части уравнения (6) на 9, получим равносильное ему уравнение

$$9x^3 + 6x^2 - 1 = 0. \qquad (7)$$

У многочлена $P_3(x) = 9x^3 + 6x^2 - 1$ коэффициент a_3 равен 9, а свободный член равен –1. Если уравнение (7) имеет корень — рациональное число $\frac{p}{q}$ $\left(\frac{p}{q}\right.$ — несократимая дробь, $\left. p \in \boldsymbol{Z},\ q \in \boldsymbol{N}\right)$, то 9 делится на q и –1 делится на p, но тогда рациональные корни уравнения (7) надо искать среди чисел $1, -1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{9}$. Вычислим

$$P_3(1) = 9 + 6 - 1 = 14 \neq 0,$$
$$P_3(-1) = -9 + 6 - 1 = -4 \neq 0,$$
$$P_3\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - 1 = 0.$$

Так как $P_3\left(\frac{1}{3}\right) = 0$, то многочлен $P_3(x)$ имеет корень $\frac{1}{3}$ и его разложение на множители имеет множитель $x - \frac{1}{3}$.

Разделив многочлен $P_3(x)$ на двучлен $x - \frac{1}{3}$, получим

$$P_3(x) = P_2(x)\left(x - \frac{1}{3}\right), \text{ где } P_2(x) = 9x^2 + 9x + 3.$$

Так как $P_2(x)$ — многочлен второй степени и его дискриминант $D = -27 < 0$, то многочлен $P_2(x)$ не имеет действительных корней.

Поэтому уравнение (7) и, следовательно, уравнение (6) имеют единственный действительный корень $x_1 = \frac{1}{3}$.

Ответ. $\frac{1}{3}$.

2.39° Что называют корнем многочлена $P_n(x)$, $n \geqslant 1$?

2.40 Определите, является ли число:
а) 0; б) –1; в) 2; г) –2; д) 3; е) 1
корнем многочлена $P_5(x) = x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12$. Какие множители содержит разложение многочлена $P_5(x)$ на множители? Выпишите все рациональные числа, среди которых следует искать корни многочлена $P_5(x)$. Какие из этих чисел являются корнями многочлена $P_5(x)$?

Разложите многочлен $P(x)$ на линейные множители, если это возможно **(2.41—2.42)**:

2.41 а) $P(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$; б) $P(x) = 3x^3 - x^2 - 6x + 2$;
в) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3$; г) $P(x) = 2x^3 - 8x^2 + x - 4$.

2.42 а) $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$;
б) $P(x) = x^4 - 8x^2 - 9$;
в) $P(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$;
г) $P(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 8$.

2.43 Найдите все корни многочлена $P(x)$, если:

а) Многочлен $P(x) = x^3 - 5x^2 + ax + b$ делится на $x - 3$ без остатка, а при делении на $x + 3$ дает остаток -42.

б) Многочлен $P(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 1$ делится на $x + 1$ без остатка, а при делении на $x + 2$ дает остаток -15.

в) Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 16$ делится на $x - 4$ без остатка, а при делении на $x + 1$ дает остаток 15.