Департамент образования г. Москвы
Московский институт открытого образования
Примерные задания школьного тура математической олимпиады, октябрь 2009
11 класс

1. Вася округлил 10 нецелых чисел: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$ до целых. Часть из них он округлил в большую сторону, часть — в меньшую сторону. Сумма округленных чисел равна 26. Сколько чисел Вася округлил в меньшую сторону?

Ответ: 6 чисел.
Округлим каждое из чисел в меньшую сторону, получим ряд: 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3. Сумма чисел равна 22. Если какое-то из чисел округлить не в меньшую, а в большую сторону, то это увеличит общую сумму на 1. Так как в итоге сумма оказалась равна 26, то в большую сторону округлялось 26-22=4 числа, а значит в меньшую 10-4=6 чисел.

2. Три бегуна стартовали по круговой дорожке одновременно, с одного места и в одном направлении. Они бегут с постоянными скоростями. Иванов впервые обогнал Петрова через a минут, а Петров впервые обогнал Сидорова через b минут. Через сколько минут Иванов впервые обогнал Сидорова?

Ответ: $ab/(a+b)$. Решение. Когда один бегун впервые обгоняет другого, это означает, что обгоняющий пробежал ровно на круг больше. Поэтому Иванов каждую минуту обгоняет Петрова на $1/a$ круга, а Петров каждую минуту обгоняет Сидорова на $1/b$ круга. Значит, Иванов каждую минуту обгоняет Сидорова на $1/a+1/b$ часть круга, и обгонит его на круг через $1/(1/a+1/b) = ab/(a+b)$ минут.

3. Докажите, что любой действительный корень уравнения $x^3+px+q=0$ удовлетворяет неравенству $4qx \le p^2$.

Пусть x_o – корень этого уравнения. Если он равен нулю, то очевидно удовлетворяет неравенству. Иначе рассмотрим квадратное уравнение $x_o x^2+px+q=0$. Очевидно x_o его корень. Т.е. такое квадратное уравнение имеет хотя бы один корень, а значит его дискриминант неотрицателен, т.е. $p^2 - 4qx_o \ge 0$, что и требовалось доказать.

Возможны и другие решения, например, такое:
Домножим уравнение $x^3+px+q=0$ на $4x$, получим: $4x^4+4px^2+4qx=0$ <=> $4x^4+4px^2+p^2=p^2- 4qx$. *Так как* $4x^4+4px^2+p^2=(2x+p)^2 \ge 0$, то $p^2-4qx_o \ge 0$, что и требовалось доказать

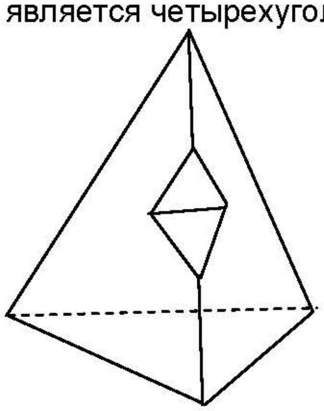
4. В 50 коробках лежат 460 шариков. Разрешается взять из любой коробки ровно 10 шариков или ровно 21 шарик (если,

конечно, это возможно) и переложить их в любую другую коробку. Оказалось, что с помощью таких операций нельзя собрать все шарики в одной коробке. Как распределены шарики по коробкам (перечислите все возможности)?

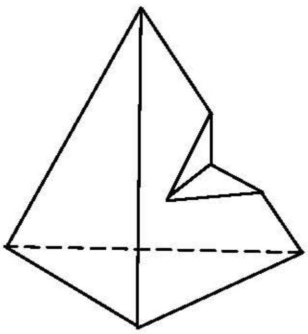
Ответ: В одной из коробок 19 шариков, а во всех остальных — по 9. Решение. Будем называть коробку *хорошей*, если в ней лежит не меньше 20 шариков, и *неплохой*, если в ней лежит не меньше 10 шариков. Допустим, одна из коробок — хорошая. Тогда переложим из неё два раза по 10 шариков в любую другую непустую коробку, а потом заберём оттуда 21 шарик. В итоге в той коробке станет на один шарик меньше, а в хорошей — на один шарик больше. Ясно, что такими операциями можно переложить в хорошую коробку все шарики. Значит, *среди наших коробок нет хороших*. Допустим, у нас есть две неплохие коробки. Тогда, переложив десять шариков из одной из них в другую, мы сделаем вторую хорошей и сможем собрать в ней все шарики. Значит, *среди наших коробок — не более одной неплохой*. Иначе говоря, найдётся 49 коробок, в каждой из которых лежит не более, чем по 9 шариков. Всего в этих коробках не более $49 \cdot 9 = 441$ шариков. Значит, в оставшейся коробке шариков не менее 460-441=19. Но и не более 19 — иначе эта коробка была бы хорошей! А такое возможно только тогда, когда в остальных 49 коробках вместе — ровно 441 шарик, т.е. в каждой из них — ровно по 9 шариков.

5. Приведите пример многогранника, имеющего столько же вершин, ребер и граней, сколько у куба, но не имеющего ни одной четырехугольной грани.

Рассмотрим произвольный тетраэдр, возьмем две точки на одном из его ребер и вырежем маленький тетраэдр (см. рис.). Полученный многогранник удовлетворяет условию, то есть имеет 8 вершин, 12 ребер и 6 граней, ни одна из которых не является четырехугольником.



вид «спереди»



вид «сбоку»