

Департамент образования г. Москвы
Московский институт открытого образования
Примерные задания школьного тура математической
олимпиады, октябрь 2009
10 класс

1. Вася округлил 10 нецелых чисел: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$ до целых. Часть из них он округлил в большую сторону, часть — в меньшую сторону. Сумма округленных чисел равна 26. Сколько чисел Вася округлил в меньшую сторону?

Ответ: 6 чисел.

Округлим каждое из чисел в меньшую сторону, получим ряд: 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3. Сумма чисел равна 22. Если какое-то из чисел округлить не в меньшую, а в большую сторону, то это увеличит общую сумму на 1. Так как в итоге сумма оказалась равна 26, то в большую сторону округлялось $26-22=4$ числа, а значит в меньшую $10-4=6$ чисел.

2. Три бегуна стартовали по круговой дорожке одновременно, с одного места и в одном направлении. Они бегут с постоянными скоростями. Иванов впервые обогнал Петрова через 5 минут, а Петров впервые обогнал Сидорова через 20 минут. Через сколько минут Иванов впервые обогнал Сидорова?

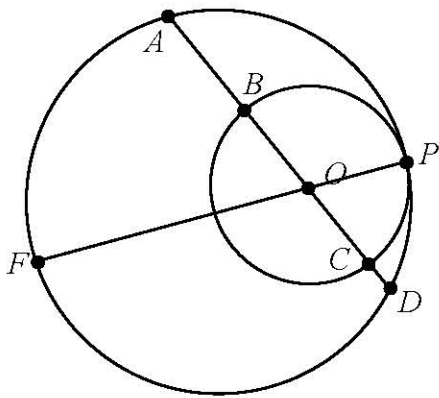
Ответ: через 4 мин. Решение. Когда один бегун впервые обгоняет другого, это означает, что обгоняющий пробежал ровно на круг больше. Поэтому Иванов каждую минуту обгоняет Петрова на $1/5$ круга, а Петров каждую минуту обгоняет Сидорова на $1/20$ круга. Значит, Иванов каждую минуту обгоняет Сидорова на $1/5+1/20$ часть круга, и обгонит его на круг через $1/(1/5+1/20) = 4$ минуты.

3. Две окружности касаются внутренним образом. Прямая, проходящая через центр меньшей окружности, пересекает большую в точках A и D , а меньшую в точках B и C . Найдите отношение радиусов окружностей, если $AB : BC : CD = 2 : 4 : 3$.

Ответ: 3:1.

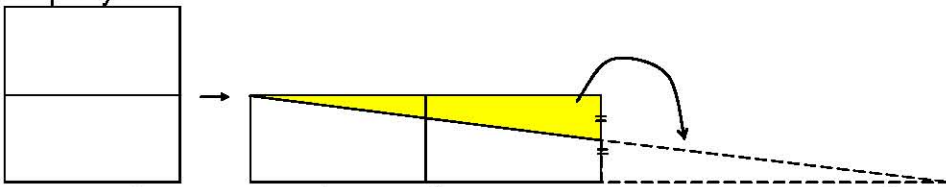
Пусть r — радиус меньшей окружности. Так как $AB : BC : CD = 2 : 4 : 3$, а BC — диаметр меньшей окружности, то $AB=BC/2=r$, $CD=3r/2$

Пусть P — точка касания окружностей, O — центр меньшей окружности, F — точка пересечения PO с большей окружностью. Треугольники AOF и POD подобны по трем углам (соответствующие углы вертикальные или опираются на равные дуги) $\Rightarrow AO:OP=FO:OD$. Так как $AO:OP=2r:r=2:1$, то $FO=2OD=2(OC+CD)=2(r+3r/2)=5r$, т.е. диаметр FP большей окружности равен $FO+OP=5r+r=6r$, а радиус соответственно $3r$.



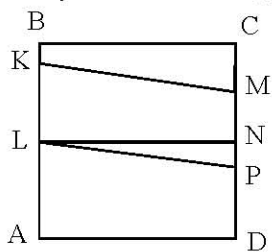
4. Разрежьте квадрат на 4 части так, чтобы из них можно было сложить треугольник, у которого одна из сторон в 8 раз длиннее другой.

Разрежем квадрат пополам и приложим половинки как показано на рисунке. Проведем разрез получившегося прямоугольника, соединив середину меньшей стороны с вершиной на противоположной стороне. Переложим части, как показано на рисунке.



таким образом, из 4 частей мы сложили прямоугольный треугольник, один катет которого в 8 раз больше другого.

Разрезы на исходном квадрате ABCD выглядят так:



где $BL = CN = AB/2$, $CM = AB/4$, $BK = NP = AB/8$.

5. Вновь назначенный директор НИИ Правды узнал, что все его n ($n > 2$) сотрудников — либо рыцари, которые всегда говорят правду, либо лжецы, которые всегда лгут, причём среди сотрудников есть и те, и другие. Каждый день он приглашает на производственное совещание нескольких сотрудников по своему выбору и спрашивает каждого, сколько на совещании лжецов. За какое наименьшее количество дней он сможет узнать, кто из сотрудников лжец, а кто рыцарь?

Ответ: за 2 дня. Решение. За один вопрос нельзя, например, отличить компанию из 1 лжеца и $n-1$ рыцаря от компании из 1 рыцаря и $n-1$ лжеца, если в первом случае лжец говорит, что на совещании 1 рыцарь, а во втором случае все лжецы говорят, что

на совещании $n-1$ рыцарь (а если директор вызовет на совещание не всех сотрудников, то ничего не узнает про тех, кого не вызвал). Таким образом, одного дня не хватит. Чтобы определить лжецов за 2 дня, в первый день вызовем всех сотрудников, а затем разобьём их на группы давших одинаковые ответы. На второй день директор должен пригласить по одному человеку из каждой такой группы. Таким образом, на второй день будет приглашен только один рыцарь (так как все рыцари сказали одно и то же – сколько всего лжецов, то в первый день рыцари составили отдельную группу, причем лжецы в эту группу попасть не могли, т.к. лжец не может сказать правду). Итак, директор точно знает, что на второй день среди пришедших ровно один рыцарь – поэтому он сможет по ответу выявить этого рыцаря (рыцарь тот, кто заявит, что все кроме одного лжецы), а вспомнив, в какой группе был этот человек в первый день, директор определит и всех остальных рыцарей.