2.4*. Теорема Безу

Пусть $P_n(x)$ — многочлен относительно x степени n ($n \geqslant 1$), т. е.

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \qquad (1)$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — данные числа, причем $a_n \neq 0$. Если многочлен $P_n(x)$ разделить с остатком на двучлен $x - a$, то частное (неполное частное) есть многочлен $Q_{n-1}(x)$ степени $n - 1$, остаток R есть число, при этом справедливо равенство

$$P_n(x) = (x - a)\,Q_{n-1}(x) + R. \qquad (2)$$

Из равенства (2) следует, что многочлен $P_n(x)$ делится нацело на двучлен $(x - a)$ только в случае $R = 0$.

ТЕОРЕМА Безу. **Остаток R от деления многочлена (1) на двучлен $(x - a)$ равен значению многочлена $P_n(x)$ при $x = a$, т. е. $R = P_n(a)$.**

Доказательство. Если в равенство (2) вместо x подставить число a, то получится, что $P_n(a) = R$, что и требовалось доказать.

Используя теорему Безу, равенство (2) можно записать в виде

$$P_n(x) = (x - a)\,Q_{n-1}(x) + P_n(a).$$

СЛЕДСТВИЕ. **Для того чтобы многочлен (1) делился на двучлен $(x - a)$ нацело, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $P_n(a) = 0$.**

Для нахождения частного $Q_{n-1}(x)$ и остатка R часто применяют метод деления уголком.

ПРИМЕР 1. Разделим многочлен $3x^3 - 2x - 20$ на двучлен $x - 2$:

$$\begin{array}{l|l}
3x^3 + 0x^2 - 2x - 20 & x - 2 \\
\underline{3x^3 - 6x^2} & 3x^2 + 6x + 10 \\
\qquad 6x^2 - \ \ 2x & \\
\qquad \underline{6x^2 - 12x} & \\
\qquad\qquad 10x - 20 & \\
\qquad\qquad \underline{10x - 20} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Итак, $3x^3 - 2x - 20 = (3x^2 + 6x + 10)(x - 20)$. Многочлен $3x^3 - 2x - 20$ разделился на двучлен $x - 2$ нацело, получено частное $3x^2 + 6x + 10$ и остаток — нулевой многочлен.

Деление многочлена $A = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ на двучлен $(x - a)$ часто записывают короче с помощью таблицы — **схемы Горнера.** При этом, очевидно, коэффициент при старшем члене частного (неполного частного) всегда будет равен коэффициенту a_n при старшем члене данного многочлена. Как находятся другие коэффициенты частного (неполного частного), покажем на конкретном примере.

Разделим многочлен $3x^3 + 0x^2 - 2x - 20$ на двучлен $x - 2$ с помощью схемы Горнера. Запишем коэффициенты 3, 0, –2 и –20 данного многочлена в верхнюю строчку таблицы. Рядом с нижней строчкой таблицы запишем число $a = 2$. В нижней строке таблицы в результате вычислений получатся коэффициенты частного (неполного частного) и остаток.

Как уже сказано выше, коэффициент при старшем члене частного (неполного частного) будет равен коэффициенту 3 при старшем члене данного многочлена — число 3 сносим в нижнюю строчку таблицы. Далее 2 умножаем на 3 и прибавляем 0, результат 6 записываем в следующую клетку таблицы; 2 умножаем на 6 и прибавляем –2, результат 10 записываем в следующую клетку таблицы; 2 умножаем на 10 и прибавляем –20, результат 0 записываем в последнюю клетку таблицы. (Сравните выполняемые действия с вычислениями при делении уголком в примере 1.)

	3	0	−2	−20
2	3	6	10	0

Полученный результат означает, что коэффициенты частного при x^2, x и свободный член равны соответственно 3, 6, 10, а остаток равен 0, что подтверждает результат, полученный делением уголком.

ПРИМЕР 2. Найдем частное и остаток при делении многочлена $P_4(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x - 1$ на двучлен $x - 3$.

Применив метод деления уголком или схему Горнера, получим

$$x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x - 1 = (x - 3)(x^3 + 5x^2 + 14x + 45) + 134,$$

и поэтому неполное частное есть многочлен

$$x^3 + 5x^2 + 14x + 45,$$

а остаток — число 134.

ПРИМЕР 3. Найдем частное и остаток при делении многочлена $P_3(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ на двучлен $x - 1$.

Применив метод деления уголком или схему Горнера, получим

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x^2 - 5x + 6),$$

и поэтому частное есть многочлен $x^2 - 5x + 6$, а остаток равен нулю.

Если требуется найти только остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на двучлен $(x - a)$, то можно пользоваться теоремой Безу.

ПРИМЕР 4. Найдем остаток от деления многочлена $2x^4 - 3x^2 - x + 5$ на двучлен $x + 1$.

Па теореме Безу остаток R от деления многочлена $P_4(x) = 2x^4 - 3x^2 - x + 5$ на двучлен $x - (-1)$ равен значению многочлена $P_4(x)$ при $x = -1$, т. е.

$$R = P_4(-1) = 2 \cdot (-1)^4 - 3 \cdot (-1)^2 - (-1) + 5 = 5.$$

2.33 Разделите уголком и по схеме Горнера многочлен:
а) $3x^3 - 4x^2 - x - 6$ на $x - 1$; на $x - 2$; на $x - 3$;
б) $3x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 5$ на $x - (-1)$; на $x + 2$; на $x + 3$;
в) $x^4 - 81$ на $x + 3$; на $x - 3$; на $x + 1$.

2.34° Сформулируйте теорему Безу.

2.35 С помощью теоремы Безу найдите остаток от деления многочлена:
а) $3x^3 - 2x^2 - 4x - 5$ на $x - 1$; на $x - 2$; на $x - 3$;
б) $x^4 + 2x^3 + x^2 + 5$ на $x - (-1)$; на $x + 2$; на $x + 3$;
в) $x^4 - 16$ на $x + 2$; на $x - 2$; на $x + 1$.

2.36 С помощью теоремы Безу докажите, что многочлен:
а) $17x^3 - 13x^2 - 4$ делится на двучлен $x - 1$ без остатка;
б) $5x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 6$ делится на двучлен $x + 1$ без остатка;
в) $x^4 - 3x^2 - 4$ делится на двучлен $x + 2$ без остатка.

2.37 Найдите остаток от деления многочлена:
а) $(x - 4)^{30}$ на $x - 5$; на $x - 3$;
б) $(2x + 3)^9$ на $x + 2$; на $x + 1$;
в) $(3x + 8)^{2000}$ на $x + 3$.

2.38 Выясните, делится ли без остатка многочлен:
а) $12x^3 - 14x^2 + 2$ на двучлен $x - 1$;
б) $x^4 - 3x^3 + x^2 + 4$ на двучлен $x - 2$;
в) $x^4 - x^3 + x^2 - x - 4$ на двучлен $x - 2$;
г) $x^4 - x^3 + x^2 - x - 4$ на двучлен $x + 1$.