

# Синус и косинус. Тангенс и котангенс

## Часть 1

*Ответом на задания В1–В8 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.*

**В1.** Выразите в градусах  $\frac{3\pi}{4}$ .

**В2.** Найдите значение выражения  
 $\cos^2 45^\circ + \sin 30^\circ - \operatorname{ctg}^2 30^\circ$ .

**В3.** Найдите значение выражения  
 $\cos \frac{\pi}{3} + 4 \sin \frac{\pi}{6} - \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4} + \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi}{3}$ .

**В4.** Упростите выражение  
 $3 - 11 \cos^2 x - 11 \sin^2 x$ .

**В5.** Вычислите  $\cos x$ , если  $\sin x = -0,8$  и  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ .

**В6.** Вычислите  $13 \sin x$ , если  $\operatorname{ctg} x = 2,4$  и  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ .

**В7.** Упростите выражение  $\cos^2 t + \operatorname{tg}^2 t \cdot \cos^2 t$ .

**В8.** Вычислите  $\frac{6 \cdot \left( \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} - \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{2} \right) \cdot \cos \frac{\pi}{6}}{2 \sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{3\pi}{2}}$ .

## Часть 2

Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1. Упростите выражение

$$\frac{\sin^4 t + \cos^2 t \cdot \sin^2 t}{\cos^4 t + \cos^2 t \cdot \sin^2 t - 1}$$

C2. Вычислите  $\frac{3 \sin t + 5 \cos t}{7 \cos t - 2 \sin t}$ , если  $\operatorname{tg} t = 3$ .

C3. Найдите значение выражения  $8 - 4 \operatorname{tg}^2 x \cdot \cos^2 x$ , если  $\sin x = 0,3$ .

C4. Упростите выражение

$$\frac{\sin^3 t + \cos^3 t}{\cos t \cdot (1 - \cos t \cdot \sin t)} - 1 - \operatorname{tg} t.$$

# Тригонометрические функции

## Часть 1

*Ответом на задания В1–В8 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.*

**В1.** Найдите значение  $\frac{\pi}{T_0}$ , где  $T_0$  — наименьший положительный период функции  $f(x) = 3 \cos x - 2$ .

**В2.** Найдите наименьший положительный период функции

$$f(x) = \sin^2 \frac{\pi x}{8} - 2.$$

**В3.** При каких положительных значениях параметра  $a$  наименьший положительный период функции  $f(x) = -2 \operatorname{tg}\left(ax - \frac{\pi}{3}\right)$  равен  $\frac{4\pi}{7}$ ?

**В4.** Найдите наименьшее значение функции  $y = \frac{1}{2} \cos 3x - 5$ .

**В5.** Сколько целых значений может принимать функция

$$y = 5,4 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)?$$

**В6.** Найдите произведение всех целых чисел, входящих в область значений функции  $y = \cos^2 x - 2 \cos x + 3$ .

**В7.** Решите уравнение  $3 \sin \frac{3\pi x}{2} = x^2 + 2x + 4$ .

**В8.** Найдите наибольшее значение аргумента, принадлежащее области определения функции  $y = \arcsin(2x + 1)$ .

## Часть 2

Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1. Исследуйте функцию  $f(x) = \frac{\sin 5x - x^3}{x + \sin 5x}$  на четность.

C2. Постройте график функции  $y = \sqrt{1 - \sin^2 2x}$ . Укажите промежутки возрастания функции.

C3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x + \cos x + 2}.$$

C4. Найдите область определения функции

$$f(x) = \sqrt{\cos x} - \sqrt{4x - 1}.$$

# Тригонометрические уравнения и неравенства

## Часть 1

*Ответом на задания В1–В8 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.*

**В1.** Вычислите  $\frac{3 \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)}{\pi}$ .

**В2.** Определите количество корней уравнения  $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ , принадлежащих интервалу  $\left(-\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$ .

**В3.** Найдите наибольший отрицательный корень уравнения  $\cos x + \frac{1}{2} = 0$ . Ответ запишите в градусах.

**В4.** Определите количество корней уравнения  $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , принадлежащих отрезку  $[-2\pi; 2\pi]$ .

**В5.** Найдите отношение наименьшего по модулю корня уравнения  $\operatorname{tg}\left(x - \frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$  к числу  $\frac{\pi}{12}$ .

**В6.** Сколько нулей имеет функция  $y = 3 \operatorname{ctg} x - \sqrt{3}$  на промежутке  $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ ?

**В7.** Найдите наименьшее значение выражения  $\cos^2 t - 1,35$ , если  $2 \sin^2 t + \cos t - 1 = 0$ .

**В8.** Сколько корней имеет уравнение  $3 \arcsin x = \pi$ ?

## Часть 2

*Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.*

C1. Решите уравнение  $\sqrt{16 - t^2} \cdot \left(3 - \frac{3}{\cos^2 t}\right) = 0$ .

C2. Решите неравенство  $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 1$ .

C3. Решите уравнение

$$\cos^2 x - 3 \sin x \cdot \cos x + 2 \sin^2 x = 2.$$

C4. Решите уравнение  $\sin x \cdot \operatorname{tg} x + 1 = \sin x + \operatorname{tg} x$  и найдите сумму наибольшего отрицательного и наименьшего положительного корней.

# Преобразование тригонометрических выражений

## Часть 1

Ответом на задания В1–В8 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

**В1.** Упростите выражение 
$$\frac{3 \cos(\pi - t) + 4 \sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right)}{2 \cos(5\pi - t) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}$$

**В2.** Вычислите  $\frac{7 \cos 31^\circ}{\sin 59^\circ}$ .

**В3.** Вычислите точное значение тригонометрической функции  $\sqrt{10} \cos \frac{x}{2}$ , если  $\cos x = 0,8$  и  $x \in \left[2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ .

**В4.** Найдите значение выражения 
$$\frac{\operatorname{tg} \frac{7\pi}{8} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg} \frac{7\pi}{8} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}$$

**В5.** Найдите отношение значения выражения  $\cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12}$  к числу  $2\sqrt{3}$ .

**В6.** Вычислите значение выражения

$$\frac{\cos \frac{7\pi}{24} \cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{7\pi}{24} \sin \frac{\pi}{8}}{\sqrt{6} \cdot \left( \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{3\pi}{20} + \sin \frac{3\pi}{20} \cos \frac{\pi}{10} \right)}$$

**В7.** Упростите выражение  $\frac{\cos 3\beta + \cos \beta}{2 \cos \beta} + 2 \sin^2 \beta$ .

**В8.** Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = \sin 2x \cdot \cos x + \cos 2x \cdot \sin x - 7.$$

## Часть 2

*Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.*

**С1.** Вычислите  $\sin^2\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{3}{7}\right) - \cos^2\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{3}{7}\right)$ .

**С2.** Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций  $y = -2 \sin 7x$  и  $y = \sqrt{3} \cos 3x + \sin 3x$ .

**С3.** Решите уравнение  $\cos 2x + \cos 6x = |\cos 4x|$ .

**С4.** При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$5 \sin 3x - 6 \cos 3x = a$$

имеет решение?

# Определение производной. Вычисление производных. Механический и геометрический смысл производной

## Часть 1

Ответом на задания В1–В8 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

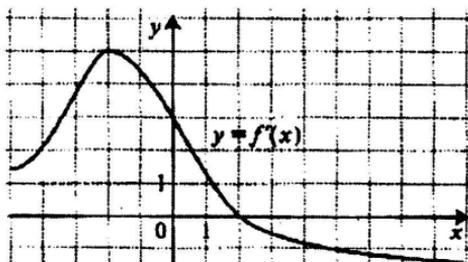
**В1.** Точка движется по закону  $s(t) = \frac{1}{2}t^2 + t$ . Найдите скорость движения в момент времени  $t = 7$ .

**В2.** Найдите значение производной функции

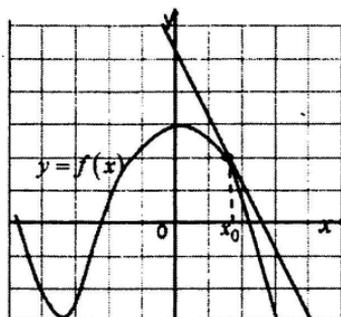
$$f(x) = 3 \sin^2 2x + 3 \cos^2 2x - \frac{\pi}{2}$$

в точке  $x_0 = \frac{\pi}{6}$ .

**В3.** Функция  $y = f(x)$  определена на всей числовой прямой. На рисунке изображен график ее производной. Определите абсциссу  $x_0$  точки, в которой касательная к графику функции параллельна оси абсцисс.



**В4.** На рисунке изображены график функции  $y = f(x)$  и касательная к этому графику в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной этой функции в точке  $x_0$ .



**В5.** Найдите тангенс угла наклона касательной к положительному направлению оси абсцисс, проведенной к графику функции  $g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{2-x}$  в точке с абсциссой  $x_0 = 1$ .

**В6.** Найдите ординату точки графика функции

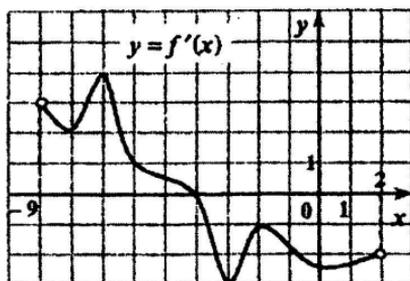
$$f(x) = -3x^2 - 4x - 21,$$

в которой касательная к нему имеет угловой коэффициент, равный 2.

**В7.** Найдите наименьшее целое решение неравенства  $f'(x) > 0$

$$f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 3x.$$

**В8.** Функция  $y = f(x)$  определена на промежутке  $(-9; 2)$ . На рисунке изображен график ее производной. Определите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в точке с абсциссой  $x_0 = -2$ .



## Часть 2

*Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.*

**С1.** Запишите уравнение касательной к графику функции

$$y = \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$$

в точке с абсциссой  $x_0 = \frac{\pi}{3}$ .

**С2.** Найдите точки, в которых касательная к графику функции

$$f(x) = \frac{x+1}{x+2}$$

параллельна прямой  $y = x - 15$ .

**С3.** При каких значениях параметра  $b$  касательная, проведенная к графику функции

$$f(x) = x^3 - bx$$

в точке с абсциссой  $x_0 = 1$ , проходит через точку  $A(2; 3)$ ?

**С4.** При каких значениях параметра  $p$  уравнение  $f'(x) = 0$  имеет решения? Найдите эти решения, если

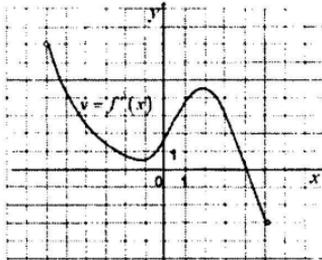
$$f(x) = \sin 4x + \frac{3}{4} \cos 4x - px.$$

# Применение производной к исследованию функций, отысканию наибольшего и наименьшего значений функции

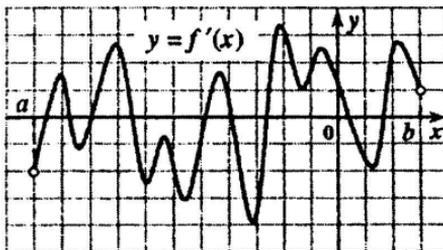
## Часть 1

Ответом на задания В1–В8 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

**В1.** Функция  $y = f(x)$  определена на промежутке  $(-6; 5)$ . На рисунке изображен график ее производной. Найдите точку  $x_0$ , в которой функция принимает наибольшее значение.



**В2.** На рисунке изображен график производной некоторой функции, определенной на интервале  $(a; b)$ . Укажите число промежутков убывания функции на интервале  $(a; b)$ .



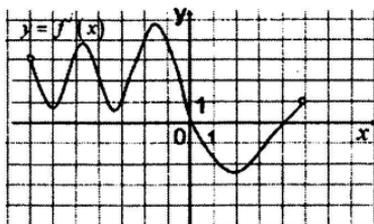
**В3.** Найдите наименьшее значение функции  $f(x) = x + \frac{9}{x} - 2$  на отрезке  $[1; 4]$ .

**В4.** Найдите точку максимума функции  $f(x) = x^3 + 3x^2$ .

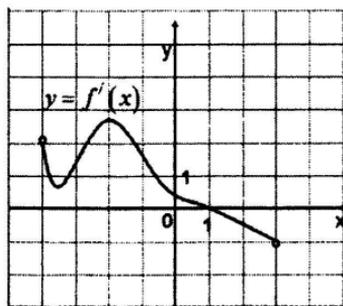
**В5.** При каком наибольшем значении параметра  $a$  функция  $y = f(x)$  убывает на всей числовой прямой, если

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + ax^2 - 3ax - 11?$$

**В6.** На рисунке изображен график производной функции  $y = f'(x)$ , заданной на интервале  $(-8; 5)$ . Укажите количество точек максимума функции  $y = f(x)$ .



**В7.** На рисунке изображен график производной функции  $y = f'(x)$ , заданной на интервале  $(-4; 3)$ . Укажите длину промежутка возрастания функции  $y = f(x)$ .



**В8.** Найдите сумму наибольшего и наименьшего значений функции  $f(x) = \sqrt{3}t - \cos 2t$  на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

## Часть 2

*Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.*

**С1.** В прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 10 см вписан прямоугольник наибольшей площади, имеющий с треугольником общий угол. Найдите площадь прямоугольника.

**С2.** При каких значениях параметра  $b$  функция  $y = f(x)$  имеет одну стационарную точку, если

$$f(x) = bx^3 - 6x^2 + 4x - \frac{29}{11}?$$

**С3.** Найдите область значений функции  $f(x) = \frac{3x + x^2}{x - 1}$ .

**С4.** Исследуйте функцию

$$f(x) = -\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x - 1$$

на монотонность и экстремумы и постройте ее график.

При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$-\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x - 1 = a$$

имеет единственное решение?