Глава 4. Векторы и координаты

Векторы

Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая — концом, называется вектором.

Точка плоскости называется нулевым **вектором**.

Длиной или **модулем вектора** $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB. Длина вектора обозначается $|\overrightarrow{AB}|$.

Векторы называются **коллинеарными**, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых. Коллинеарные векторы бывают **сонаправленными** ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$) (см. рис. 135) и **противоположно направленными** ($\vec{p} \uparrow\downarrow \vec{d}$) (см. рис. 136).

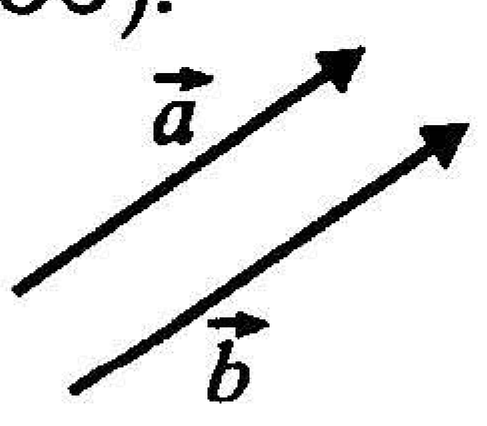

Рис. 135.

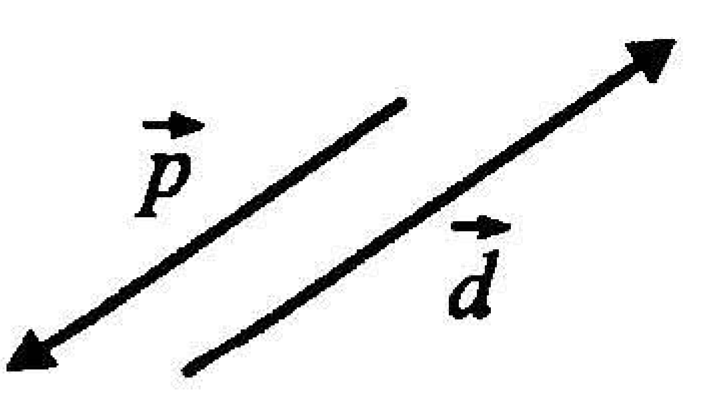

Рис. 136.

Сумма и разность векторов

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$
3. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$

На рисунке 137 показано, как построить сумму и разность векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$.

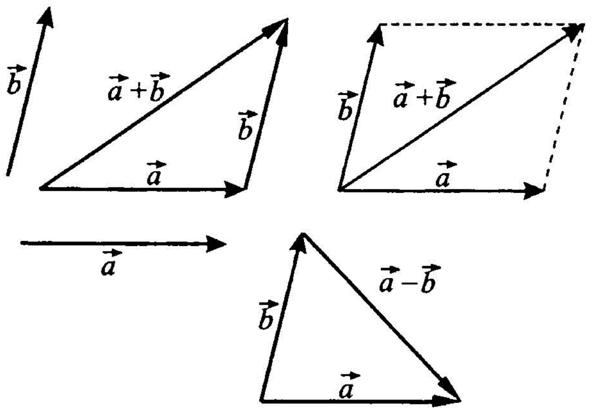

Рис. 137.

4. Умножение вектора на число.

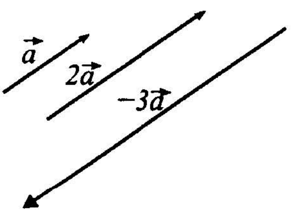

Рис. 138.

$k \cdot \overrightarrow{a}$ — такой вектор, длина которого равна $|k| \cdot |\overrightarrow{a}|$ и который при $k > 0$ сонаправлен с $\overrightarrow{a}$, при $k < 0$ противоположно направлен $\overrightarrow{a}$ (см. рис. 138).

5. Если M — середина AB, то $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$.

Скалярное произведение векторов и его свойства

$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos\alpha$, где α — угол между векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ (см. рис. 139).

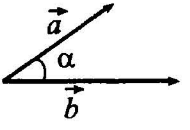

Рис. 139.

$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$

$\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}$

$|\overrightarrow{a}|^2 = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}^2$

$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$

$|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}| \geqslant |\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| \geqslant |\overrightarrow{a}| - |\overrightarrow{b}|$

Координаты вектора

Чтобы найти **координаты вектора**, нужно из координат конца вектора вычесть координаты начала. Если точки A и B заданы координатами $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$, то координаты вектора $\overrightarrow{AB}\{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1\}$.

Длина отрезка $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Например, на рисунке 140 координаты точек $A(5;\ 1)$, $B(1;\ 3)$. Координаты вектора $\overrightarrow{AB}\{1 - 5;\ 3 - 1\}$, то есть $\overrightarrow{AB}\{-4;\ 2\}$. $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

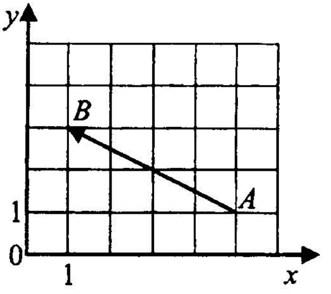

Рис. 140.

Координаты середины отрезка следует находить по формулам $x_c = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$; $y_c = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

Например, на рисунке 140 координаты середины отрезка AB равны $x = \dfrac{1+5}{2} = 3; y = \dfrac{1+3}{2} = 2$.

Если $\overrightarrow{a}\{x_1;\ y_1\}$, $\overrightarrow{b}\{x_2;\ y_2\}$, то:

1. вектор $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ имеет координаты $\{x_1 + x_2;\ y_1 + y_2\}$;
2. вектор $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ имеет координаты $\{x_1 - x_2;\ y_1 - y_2\}$;
3. вектор $k\overrightarrow{a}$ имеет координаты $\{kx_1;\ ky_1\}$;
4. $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$;
5. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$.

Задачи с решениями

6. Найдите координаты векторов $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $5\vec{a}$, если известно, что $\vec{a}\{2;\ -3\}$, $\vec{b}\{-5;\ -2\}$.

Решение.

$\vec{a} + \vec{b} = \{2 + (-5);\ -3 + (-2)\} = \{-3;\ -5\}$.

$\vec{a} - \vec{b} = \{2 - (-5);\ -3 - (-2)\} = \{7;\ -1\}$.

$5\vec{a} = \{5 \cdot 2;\ 5 \cdot (-3)\} = \{10;\ -15\}$.

Ответ: $\{-3;\ -5\}$, $\{7;\ -1\}$, $\{10;\ -15\}$.

7. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}\{3;\ 8\}$ и $\overrightarrow{MN}\{-2;\ 3\}$.

Решение.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MN} = x_{\overrightarrow{AB}} \cdot x_{\overrightarrow{MN}} + y_{\overrightarrow{AB}} \cdot y_{\overrightarrow{MN}} = 3 \cdot (-2) + 8 \cdot 3 = 18.$

Ответ: 18.

8. Длина вектора $\overrightarrow{a}$ равна 4, длина вектора $\overrightarrow{b}$ равна 10, а длина вектора $\overrightarrow{c}$ равна 5. Найдите $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}$, если известно, что угол между векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ равен 120°, а векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{c}$ сонаправлены.

Решение.

$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos \widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}.$

Тогда $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 4 \cdot 10 \cdot \cos 120° = 40 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -20.$

По условию $\overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{c}$, значит между ними угол 0°, т.е. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} = 4 \cdot 5 \cdot \cos 0° = 4 \cdot 5 \cdot 1 = 20.$

Ответ: –20; 20.

9. Длина вектора $\overrightarrow{m}$ равна 12, длина вектора $\overrightarrow{k}$ равна 5. Найдите длину вектора $\overrightarrow{m} - \overrightarrow{k}$, если вектор $\overrightarrow{m}$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{k}$.

Решение.

Построим рисунок 141.

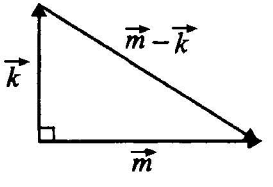

Рис. 141.

$\vec{m} \perp \vec{k}$, поэтому $|\vec{m} - \vec{k}|$ можно найти как гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами 5 и 12. $|\vec{m} - \vec{k}| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.

Ответ: 13.

10. Найдите отрицательную координату y, если расстояние от точки $M(1;\ y)$ до точки $K(4;\ -3)$ равно 5.

Решение.

Запишем расстояние от M до K: $MK = \sqrt{(4-1)^2 + (-3-y)^2} = 5$. Тогда $3^2 + (3+y)^2 = 25$, $(3+y)^2 = 16$, $\left[\begin{array}{l} 3+y=4, \\ 3+y=-4; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} y=1, \\ y=-7. \end{array}\right.$

Выберем отрицательную координату $y = -7$.

Ответ: -7.