Глава 5. Графики и функции

Понятие графика. Простейшие задачи

① *Немного полезной информации*

Областью определения функции $y = f(x)$ называется множество всех значений аргумента x, для которых выражение $f(x)$ определено (имеет смысл). Например, область определения функций $y = x^2 + x + 1$ и $y = \sqrt[3]{x}$ — все действительные числа, область определения функции $y = \dfrac{1}{x-1}$ — все действительные числа, кроме 1 (так как при $x = 1$ знаменатель дроби $\dfrac{1}{x-1}$ равен нулю и выражение не имеет смысла), область определения функции $y = \sqrt{x}$ — все неотрицательные числа (то есть $x \geqslant 0$).

Каждая функция, заданная при помощи формулы, имеет в прямоугольной системе координат Oxy свой график. **Графиком функции** $y = f(x)$ называют множество точек координатной плоскости Oxy вида $(x; f(x))$, где x — любое число из области определения функции.

Часто встречаются задания, в которых необходимо установить соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают. Для решения таких заданий следует

- определить общий вид графика, задаваемого каждой формулой;
- если среди предложенных вариантов содержится несколько графиков нужного типа, проверить соответствие формул и графиков по точкам.

Рассмотрим графики некоторых элементарных функций.

Прямая

График функций, заданных формулой вида $y = kx + b$, — прямая.

Рассмотрим разные случаи расположения прямой в зависимости от значений коэффициентов k и b в формуле (см. рис. 33).

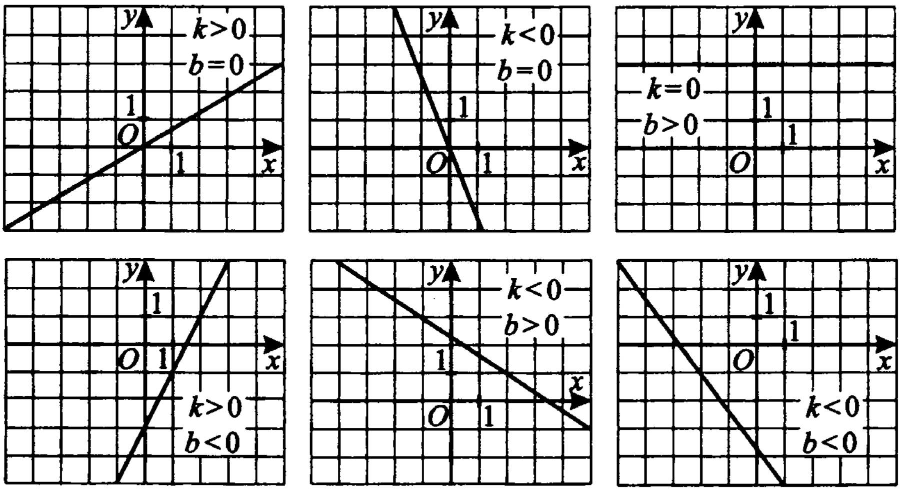

Рис. 33.

Коэффициент k определяет угол наклона прямой. При $k = 0$ функция имеет вид $y = b$, её график параллелен оси абсцисс (оси Ox). При $k > 0$ прямая уходит вправо-вверх: при возрастании x значение функции $y = kx + b$ также возрастает. При $k < 0$ прямая уходит вправо-вниз: при возрастании x значение функции $y = kx + b$ убывает.

Коэффициент b определяет, в каком месте график пересечёт ось ординат (ось Oy). При $b = 0$ получаем функцию

$y = kx$. Её график — прямая, проходящая через начало координат. Действительно, точка $(0; 0)$ принадлежит графику функции $y = kx$, так как $0 = k \cdot 0$. При $b > 0$ функция пересекает ось ординат выше оси абсцисс, а при $b < 0$ — ниже оси абсцисс. Действительно, точке пересечения графика и оси ординат соответствует точка графика с абсциссой $x = 0$, то есть точка $(0; b)$. В зависимости от знака b эта точка находится выше или ниже оси абсцисс.

Задачи с решениями

1. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 34) и формулами, которые их задают.

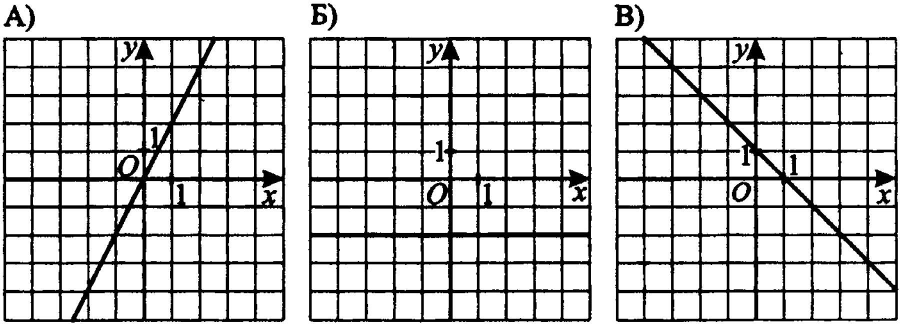

Рис. 34.

1) $y = -2x + 1$ 2) $y = 2x$ 3) $y = -x + 1$ 4) $y = -2$

Решение. Все три графика — прямые, то есть заданы формулами вида $y = kx + b$.

Для графика А выполняется $b = 0$, так как прямая проходит через начало координат. Из предложенных вариантов ему соответствует формула $y = 2x$ (2).

График Б параллелен оси абсцисс, поэтому $k = 0$, из предло-

женных вариантов ему соответствует формула $y = -2$ (4).
Для В выполняется $k < 0$ и $b > 0$, то есть ему могут соответствовать формулы $y = -2x + 1$ (1) или $y = -x + 1$ (3). Найдём подходящую формулу по двум точкам. График В проходит через точки плоскости с координатами $(0; 1)$ и $(1; 0)$. Подставим в формулы значения координат этих точек: для формулы 1 получаем при $x = 0$, $y = 0 + 1 = 1$; при $x = 1$ $y = -2 + 1 = -1$, ей график соответствовать не может. Для формулы 3 получаем: $x = 0$, $y = 0 + 1 = 1$; при $x = 1$ $y = -1 + 1 = 0$, следовательно, график В соответствует формуле 3.

Ответ:

А	Б	В
2	4	3

Замечание. Любая прямая задаётся двумя точками, поэтому для проверки соответствия формулы и графика достаточно подставить в формулу координаты двух точек графика (при условии, что формула задаёт прямую и график является тоже прямой).

Парабола

График функции, заданной формулой вида
$y = ax^2 + bx + c$ или $y = a(x - m)^2 + n$, где $a \neq 0$, — парабола. Вершина параболы находится в точке с абсциссой, равной $m = -\dfrac{b}{2a}$, и в зависимости от знака параметра a и знака выражения $D = b^2 - 4ac$ график может принимать различный вид (см. рис. 35).

При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, при $a < 0$ — вниз. Знак дискриминанта D показывает, пересекает ли па-

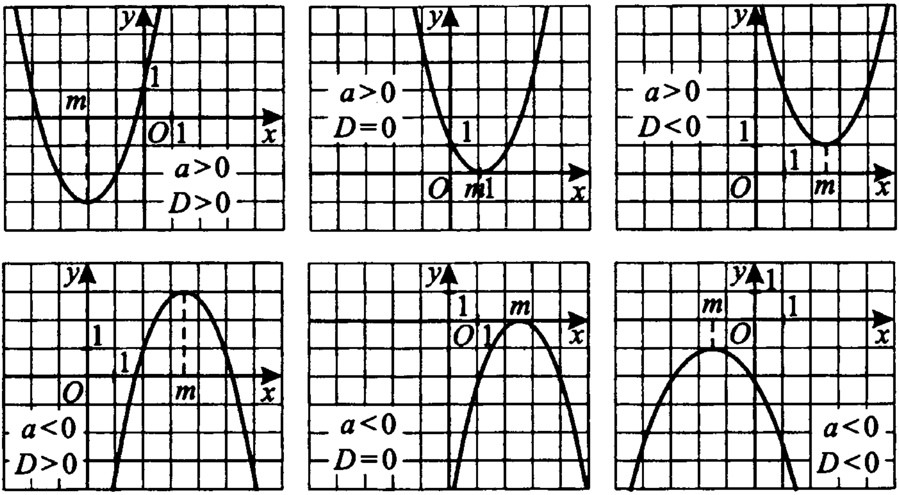

Рис. 35.

рабола ось абсцисс. При $D > 0$ парабола пересекает ось абсцисс дважды, при $D = 0$ — один раз (вершина параболы лежит на оси абсцисс). При $D < 0$ парабола не пересекает ось абсцисс.

Задачи с решениями

2. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 36) и формулами, которые их задают.

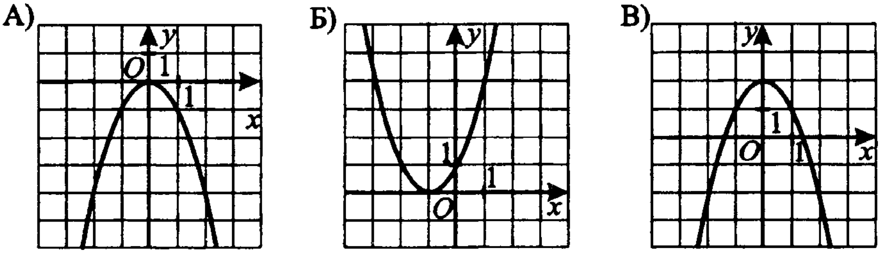

Рис. 36.

1) $y = -x^2 + 2$ 2) $y = (x+1)^2$

3) $y = (x-1)^2$ 4) $y = -x^2$

Решение. Все три графика — параболы, то есть заданы формулами вида $y = ax^2 + bx + x$ или $y = a(x-m)^2 + n$.

На графике А ветви параболы направлены вниз, значит, параметр $a < 0$. Этому условию отвечают формулы 1 и 4, но так как график А проходит через точку плоскости с координатами $(0; 0)$, а график, заданный формулой 1, через неё не проходит (при $x = 0$ $y = 2 \neq 0$), то графику А соответствует формула 4.

На графике Б ветви параболы направлены вверх, $a > 0$, и он может быть задан формулой 2 или 3, но так как вершина параболы лежит на оси Ox в точке с абсциссой $x = -1$, то $y(-1) = 0$. Формула 3 не подходит, так как для неё $y(-1) = (-1-1)^2 \neq 0$. Графику Б соответствует формула 2: $y = (x+1)^2$.

На графике В ветви параболы направлены вниз, $a < 0$, и ему могут соответствовать формулы 1 и 4. Так как $y(0) = 2$, то формула 4 не подходит (в ней $y(0) = -0^2 = 0$), следовательно, график В задаёт формула 1.

Ответ:

А	Б	В
4	2	1

Замечание. Для параболы при проверке соответствия графика одной из нескольких формул удобно использовать сравнение координат вершины параболы, изображённой на графике, и координат вершин парабол, задаваемых формулами. Если эти координаты для двух формул совпадают, следует выбирать ещё одну дополнительную точку графика для проверки.

Немного полезной информации

Гипербола

График функции, заданной формулой вида $y = \frac{k}{x}$ или $y = \frac{k}{x-m} + n$, $k \neq 0$, — гипербола. Область определения функции, заданной формулой $y = \frac{k}{x}$, — все действительные числа, кроме 0, значит, график этой функции не пересекает ось ординат. Аналогично график, заданный $y = \frac{k}{x-m} + n$, не будет проходить ни через одну точку плоскости с абсциссой m (то есть не пересекает вертикальную прямую $x = m$).

В зависимости от значений, которые принимают параметры k, гипербола $y = \frac{k}{x}$ может быть по-разному расположена на декартовой плоскости. При $k > 0$ гипербола расположена в I и III четвертях, при $k < 0$ — во II и IV (см. рис. 37).

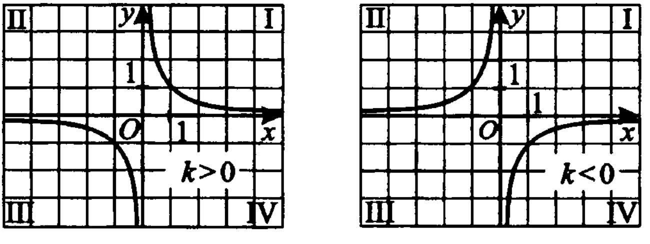

Рис. 37.

При наличии параметров m и n график гиперболы получается из графика $y = \dfrac{k}{x}$ параллельным переносом вправо вдоль оси Ox на m и вверх вдоль оси Oy на n (см. рис. 38).

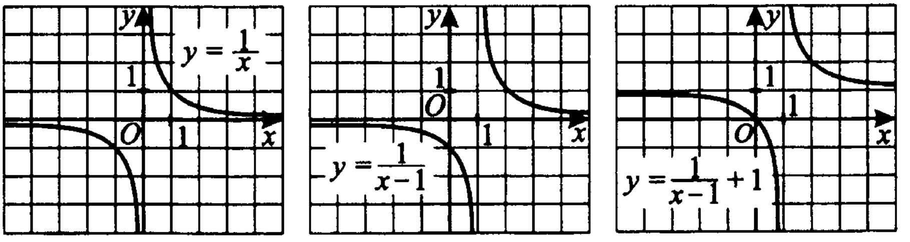

Рис. 38.

Задачи с решениями

3. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 39) и формулами, которые их задают.

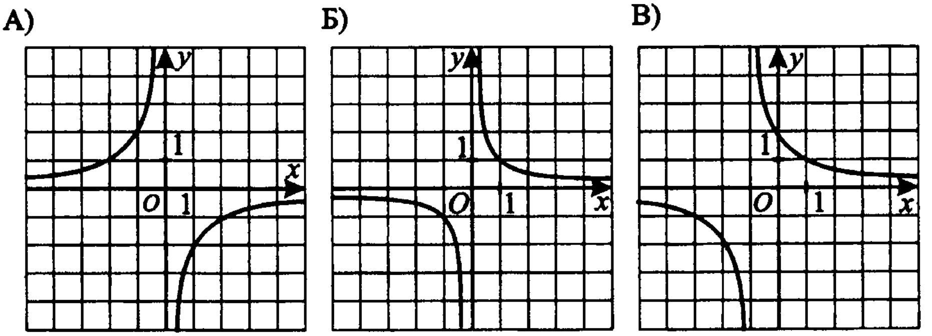

Рис. 39.

1) $y = -\dfrac{2}{x}$ 2) $y = \dfrac{2}{x+1}$ 3) $y = \dfrac{1}{x}$ 4) $y = -\dfrac{1}{x}$

Решение. Все три графика — гиперболы, то есть заданы формулами вида $y = \dfrac{k}{x}$ или $y = \dfrac{k}{x-m} + n$.

Для графика А значение параметра $k < 0$, значит, он может быть задан формулами 1 или 4. Проверим точку $(1; -2)$, через которую проходит этот график. Формула номер 1: $y(1) = -\frac{2}{1} = -2$ — подходит. Формула номер 4: $y(1) = -\frac{1}{1} = -1 \neq -2$ — не подходит. Следовательно, из предложенных формул графику А соответствует формула 1.

Для графика Б выполняется $k > 0$, значит, он может быть задан формулами 2 или 3. Проверим точку $(-1; -1)$, через которую проходит этот график (точку $(1; 1)$ брать нецелесообразно, так как график В также проходит через неё). Формула номер 2: $y(-1) = \dfrac{2}{-1+1}$ — не определено, поэтому не подходит. Формула номер 3: $y(-1) = \frac{1}{-1} = -1$ — подходит. Следовательно, из предложенных формул графику Б соответствует формула 3.

Для графика В выполняется $k > 0$, значит, он может быть задан формулами 2 или 3. Так как из них неиспользованной осталась только формула 2, то она и задаёт этот график.

Ответ:

А	Б	В
1	3	2

ⓘ *Немного полезной информации*

График функции корня

Рассмотрим графики функций квадратного и кубического корней. Областью определения функции, заданной формулой

$y = \sqrt{x}$, является $x \geqslant 0$. Областью определения функции, заданной формулой $y = \sqrt[3]{x}$, являются все действительные числа (см. рис. 40).

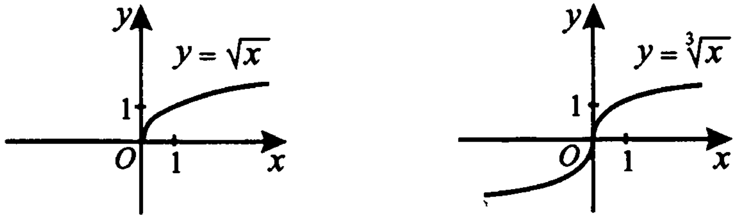

Рис. 40.

График функции, заданной формулой вида $y = \sqrt{x-p}+q$, получается из графика, заданного формулой $y = \sqrt{x}$, параллельным переносом вправо вдоль оси Ox на p и вверх вдоль оси Oy на q. Например, график функции $y = \sqrt{x-2}+1$ получается из графика $y = \sqrt{x}$ параллельным переносом вправо на 2 деления и на 1 вверх (см. рис. 41).

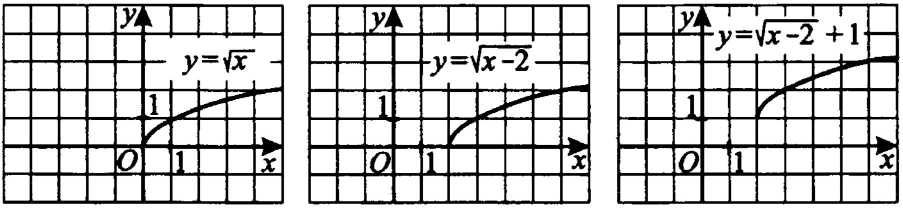

Рис. 41.

Задачи с решениями

4. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 42) и формулами, которые их задают.

1) $y = \sqrt{x}$ 2) $y = \sqrt{x} - 3$

3) $y = \sqrt{x+3}$ 4) $y = \sqrt{x+1}$

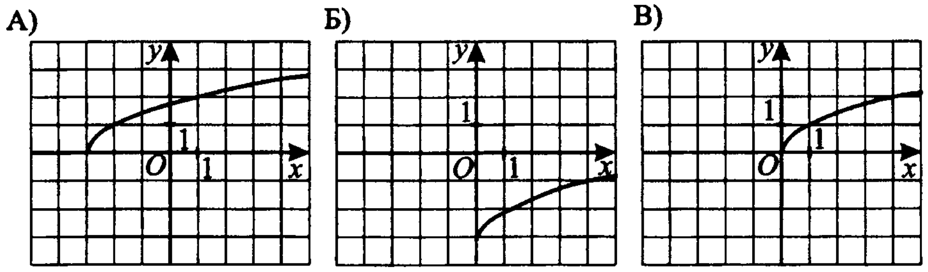

Рис. 42.

Решение. Заметим, что графики А — В представляют собой смещённые графики функции $y = \sqrt{x}$, а потому задаются формулами вида $y = \sqrt{x - p} + q$.

График А проходит через $(-3; 0)$ и задаётся формулой $y = \sqrt{x + 3}$, так как из предложенных только она удовлетворяет соотношению $y(-3) = 0$.

График Б проходит через $(0; -3)$ и задаётся формулой $y = \sqrt{x} - 3$, так как из предложенных только она удовлетворяет соотношению $y(0) = -3$.

График В проходит через $(0; 0)$ и задаётся формулой $y = \sqrt{x}$, так как из предложенных только она удовлетворяет соотношению $y(0) = 0$.

Ответ:

А	Б	В
3	2	1

Замечание. Вообще-то говоря, подстановка координат одной точки в формулы может оказаться недостаточной (несколько формул превратятся в верные равенства). Тогда надо подставить координаты ещё одной точки.

Рассмотрим теперь задания, содержащие графики разных видов.

Задачи с решениями

5. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 43) и формулами, которые их задают.

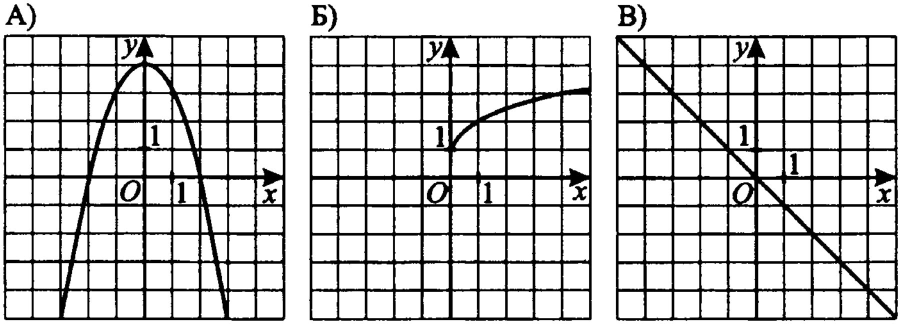

Рис. 43.

1) $y = -x^2 + 4$ 2) $y = -x^2 + 1$

3) $y = \sqrt{x} + 1$ 4) $y = -x$

Решение.

График А — парабола, ветви которой направлены вниз. Из предложенных формул только 1 и 2 задают такую параболу. Вершина параболы, заданной формулой 1, лежит в точке с координатами $(0; 4)$, вершина параболы, заданной формулой 2, — в точке с координатами $(0; 1)$. Вершина параболы А лежит в точке $(0; 4)$, значит, график А задаётся формулой 1.

График Б — смещённый график квадратного корня. Из предложенных вариантов ему может соответствовать только формула 3.

График В — прямая. Из предложенных ему соответствует формула 4.

Ответ:

А	Б	В
1	3	4

6. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 44) и формулами, которые их задают.

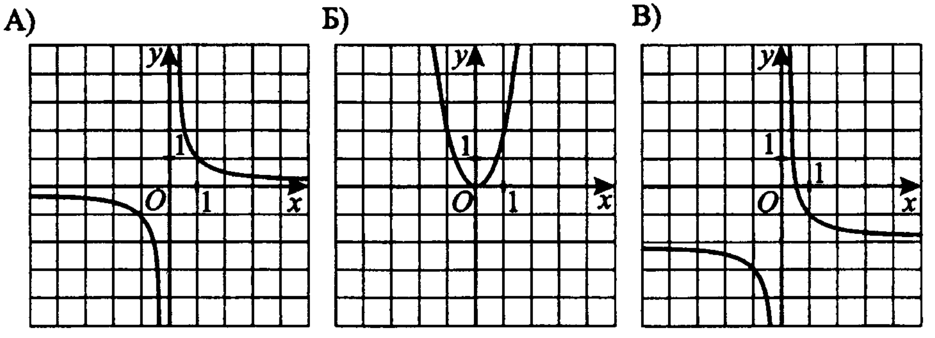

Рис. 44.

1) $y = \dfrac{1}{x} - 2$ 2) $y = x^2$ 3) $y = \dfrac{1}{x}$ 4) $y = 2x^2$

Решение. График А — гипербола, задаваемая формулой вида $y = \dfrac{k}{x}$, $k > 0$. Значит, А соответствует формула 3.

График Б — парабола, ветви которой направлены вверх. Такую параболу задают формулы 2 или 4. Координаты вершины параболы Б (0; 0) и координаты вершин парабол, задаваемых формулами, совпадают, поэтому рассмотрим дополнительно точку графика Б с координатами (1; 2) и подставим значения её координат в формулы. Для формулы 2 при $x = 1$ $y = 1 \neq 2$, следовательно, график Б задаётся формулой 4.

График В — гипербола. Из оставшихся формул подходит только формула 1.

Ответ:

А	Б	В
3	4	1

Пересечение графиков

Немного полезной информации

Для того чтобы решить задания, в которых требуется найти координаты точки пересечения графиков (заданных уравнениями), удовлетворяющей определённому условию, нужно

- составить и решить систему уравнений, задающих графики, тем самым найдя все их точки пересечения;
- определить условия, отличающие искомую точку от других (например, знак абсциссы), выбрать среди всех найденных точек пересечения искомую.

Задачи с решениями

7. На рисунке 45 изображены графики функций $y = x^2 - 3$ и $y = x - 1$. Вычислите координаты точки B.

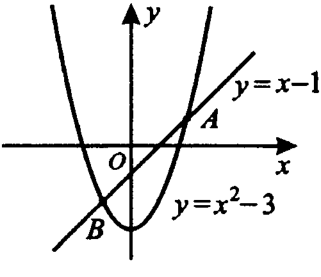

Рис. 45.

Решение.

Решим систему уравнений $\begin{cases} y = x^2 - 3, \\ y = x - 1. \end{cases}$

$x^2 - 3 = x - 1;\ x^2 - x - 2 = 0;\ x_1 = 2,\ x_2 = -1;\ y_1 = 1,\ y_2 = -2.$

Таким образом, решениями системы являются точки $(2; 1)$ и $(-1; -2)$.

Точка B расположена слева от оси Oy, точка A — справа, следовательно, абсцисса точки B — отрицательное число, в то время как абсцисса точки A — положительное.

Среди найденных точек пересечения выбираем точку с отрицательной абсциссой: $(-1; -2)$.

Ответ: $(-1; -2)$.

8. На рисунке 46 изображены графики функций $y = 2x + 5$ и $y = 4 - (x + 2)^2$. Вычислите координаты точки A.

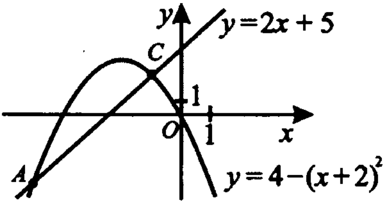

Рис. 46.

Решение.

а) Решим систему уравнений $\begin{cases} y = 2x + 5, \\ y = 4 - (x + 2)^2. \end{cases}$

$2x + 5 = 4 - (x + 2)^2;\ 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = 0;\ x^2 + 6x + 5 = 0;$
$x_1 = -5,\ x_2 = -1;\ y_1 = -5,\ y_2 = 3.$

Таким образом, решениями системы являются точки $(-5; -5)$ и $(-1; 3)$.

б) Точка A расположена ниже оси Ox, точка C — выше, следовательно, ордината точки A — отрицательное число, ордината точки C — положительное.

в) Среди найденных точек пересечения выбираем точку с отрицательной ординатой: $(-5; -5)$.

Ответ: $(-5; -5)$.

Замечание. Можно было бы рассуждать иначе: точка A левее точки C, поэтому абсцисса точки A меньше абсциссы точки C. Из точек $(-5; -5)$ и $(-1; 3)$ абсцисса точки $(-5; -5)$ меньше, поэтому точка $(-5; -5)$ является искомой.