

Глава 2. Алгебраические выражения

① Немного полезной информации

Алгебраическое выражение — это запись из чисел и букв, соединённых знаками действий и скобками.

Приведём примеры алгебраических выражений:

$$3(a + b); \quad 7x + 1; \quad y; \quad 2yz; \quad \frac{2a + c}{x}.$$

Значение выражения мы получаем при замене каждой буквы некоторым числом и выполнении алгебраических действий.

Например, найдём значение выражения $7a - 3ab + 1$ при $a = 4$, $b = 2$. Подставив вместо букв указанные числа, получим $7 \cdot 4 - 3 \cdot 4 \cdot 2 + 1 = 28 - 24 + 1 = 5$.

Слагаемые, имеющие одинаковые буквенные множители, называют **подобными**.

Например, слагаемые $3ab$ и $-5ab$ являются подобными. Также являются подобными слагаемые $4x$ и $10x$. А слагаемые $3x$ и $3y$ подобными не являются.

При упрощении выражения следует находить суммы подобных слагаемых, то есть выполнять **приведение подобных слагаемых**.

Задачи с решениями

1. Упростите выражение $5xy + x + y - 2xy - 3xy$ и найдите его значение при $x = 2 + \sqrt{2}$, $y = 3 - \sqrt{2}$.

Решение.

В исходном выражении найдём и подчеркнём все подобные слагаемые: $5xy$ + $x + y$ - $2xy$ - $3xy$. Найдём сумму подчёркнутых слагаемых: $5xy - 2xy - 3xy = (5 - 2 - 3)xy = 0xy = 0$. Таким образом, $5xy + x + y - 2xy - 3xy = x + y$. Подставляя вместо x и y указанные в условии числа, получаем $x + y = 2 + \sqrt{2} + 3 - \sqrt{2} = 5$.

Ответ: 5.

2. Упростите выражение $5a + 3\sqrt{7} - 4a - 4\sqrt{7}$ и найдите его значение при $a = 2 + \sqrt{7}$.

Решение.

В исходном выражении найдём и подчеркнём все подобные слагаемые: $5a$ + $3\sqrt{7}$ - $4a$ - $4\sqrt{7}$. Найдём сумму слагаемых,

подчёркнутых одной чертой: $5a - 4a = a$. Теперь найдём сумму слагаемых, подчёркнутых двумя чертами: $3\sqrt{7} - 4\sqrt{7} = -\sqrt{7}$. Таким образом, $5a + 3\sqrt{7} - 4a - 4\sqrt{7} = a - \sqrt{7}$. Подставляя вместо a указанное в условии число, получаем $a - \sqrt{7} = 2 + \sqrt{7} - \sqrt{7} = 2$.

Ответ: 2.

Правила раскрытия скобок

① Немного полезной информации

- Если перед скобками стоит знак «+», то при раскрытии скобок все слагаемые остаются без изменений.

Например, $2a + (3b - c + 4) = 2a + 3b - c + 4$.

- Если перед скобками стоит знак «-», то при раскрытии скобок каждое слагаемое меняет знак на противоположный. Например, $4x - (y - 6z - 5) = 4x - y + 6z + 5$.

- Если перед скобками (или после скобок) стоит множитель, то при раскрытии скобок каждое слагаемое умножается на этот множитель. При подсчёте этих произведений следует учитывать как знак множителя за скобками, так и знаки слагаемых внутри скобок.

Рассмотрим два примера:

$$(5a - b - 8) \cdot 4c = 5a \cdot 4c + (-b) \cdot 4c + (-8) \cdot 4c = \\ = 20ac - 4bc - 32c;$$

$$-2x(3y - z + 4) = (-2x) \cdot 3y + (-2x) \cdot (-z) + (-2x) \cdot 4 = \\ = -6xy + 2xz - 8x.$$

8 — Задачи с решениями

3. Упростите выражение $(b - c) \cdot 4a + 4ac$ и найдите его значение при $a = \sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{2}$, $c = 3\sqrt{2}$.

Решение.

$(b - c) \cdot 4a + 4ac = 4ba - 4ca + 4ac = 4ba$. Подставляя вместо a и b указанные в условии числа, получаем $4ba = 4 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

Ответ: 16.

4. Упростите выражение $3ac - a(c - 3b) - 3ab$ и найдите его значение при $a = \sqrt{3}$, $b = 5\sqrt{3}$, $c = 3\sqrt{3}$.

Решение.

$3ac - a(c - 3b) - 3ab = 3ac - a \cdot c - a \cdot (-3b) - 3ab =$
 $= 3ac - ac + 3ab - 3ab = 2ac$. Подставляя вместо a и c указанные в условии числа, получаем $2ac = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$.

Ответ: 18.

① Немного полезной информации

Если требуется раскрыть произведение, состоящее из нескольких скобок, то скобки следует раскрывать поочерёдно. Например:

$$\begin{aligned}(3a - 2b)(4x - 5y) &= 3a(4x - 5y) - 2b(4x - 5y) = \\&= 3a \cdot 4x + 3a \cdot (-5y) + (-2b) \cdot 4x + (-2b) \cdot (-5y) = \\&= 12ax - 15ay - 8bx + 10by.\end{aligned}$$

В этом примере мы сначала раскрыли первые скобки $(3a - 2b)$, а затем вторые скобки $(4x - 5y)$. Но можно было сделать и по-другому, начав с раскрытия вторых скобок:

$$\begin{aligned}(3a - 2b)(4x - 5y) &= (3a - 2b) \cdot 4x + (3a - 2b) \cdot (-5y) = \\&= 3a \cdot 4x + (-2b) \cdot 4x + 3a \cdot (-5y) + (-2b) \cdot (-5y) = \\&= 12ax - 8bx - 15ay + 10by.\end{aligned}$$

8 — Задачи с решениями

5. Упростите выражение $(a - 6)(b + 5) - ab + 6b$ и найдите его значение при $a = 7$, $b = 3 + 4\sqrt{7}$.

Решение.

$(a - 6)(b + 5) - ab + 6b = a(b + 5) - 6(b + 5) - ab + 6b =$
 $= ab + 5a - 6b - 30 - ab + 6b = 5a - 30$. Подставляя $a = 7$,
 получаем $5a - 30 = 5 \cdot 7 - 30 = 35 - 30 = 5$.

Ответ: 5.

Формулы сокращённого умножения

① Немного полезной информации

Следует запомнить три формулы сокращённого умножения.

- Квадрат суммы: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- Квадрат разности: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
- Разность квадратов: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Например:

$$(2c + 3)^2 = (2c)^2 + 2 \cdot 2c \cdot 3 + 3^2 = 4c^2 + 12c + 9;$$

$$(3k - 1)^2 = (3k)^2 - 2 \cdot 3k \cdot 1 + 1^2 = 9k^2 - 6k + 1;$$

$$t^2 - 25 = t^2 - 5^2 = (t - 5)(t + 5).$$

8 — Задачи с решениями

6. Сократите дробь $\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$, $x \neq -1$.

Решение.

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = \frac{x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2}{x + 1} = \frac{(x + 1)^2}{x + 1} = x + 1.$$

Ответ: $x + 1$.

7. Сократите дробь $\frac{a^2 - 9}{a + 3}$, $a \neq -3$.

Решение.

$$\frac{a^2 - 9}{a + 3} = \frac{a^2 - 3^2}{a + 3} = \frac{(a - 3)(a + 3)}{a + 3} = a - 3.$$

Ответ: $a - 3$.

Допустимые значения переменных

① Немного полезной информации

- **Допустимые значения переменных** — это значения, при которых алгебраическое выражение имеет смысл.
- Если в выражении есть дробь, то **знаменатель дроби** должен быть **отличен от нуля**.

Например, для выражения $\frac{b}{a - 2}$ допустимыми являются значения переменных, удовлетворяющие условию $a - 2 \neq 0$, то есть $a \neq 2$.

- Если в алгебраическом выражении есть квадратный корень, то **подкоренное выражение** должно быть **неотрицательно**.

Например, для выражения $\sqrt{y + 3}$ допустимыми являются значения переменных, удовлетворяющие условию $y + 3 \geq 0$, то есть $y \geq -3$.

🔑 Задачи с решениями

8. Найдите допустимые значения переменной b в выражении

$$\frac{b}{\sqrt{b - 5}}.$$

Решение.

Выражение под корнем должно быть неотрицательным, поэтому $b - 5 \geq 0$, $b \geq 5$. Кроме того, знаменатель должен быть отличен от нуля, поэтому $\sqrt{b - 5} \neq 0$, $b - 5 \neq 0$, $b \neq 5$. Таким образом, одновременно должно выполняться $b \geq 5$ и $b \neq 5$, следовательно, $b > 5$.

Ответ: $b > 5$.

9. Найдите количество целых чисел, входящих в область допустимых значений переменной x в выражении $\frac{3 - \sqrt{10 - x}}{\sqrt{x - 3}}$.

Решение.

1-й способ.

В числителе под корнем стоит выражение $10 - x$, поэтому $10 - x \geq 0$, $x \leq 10$. В знаменателе под корнем стоит выражение $x - 3$, поэтому $x - 3 \geq 0$. Кроме того, знаменатель должен быть отличен от нуля, поэтому последнее неравенство должно быть строгим: $x - 3 > 0$, $x > 3$. Мы нашли область допустимых значений: $3 < x \leq 10$. В неё входят целые числа 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 — всего 7 чисел.

2-й способ.

Покажем запись решения, если рассуждения выполнять устно.

$$\begin{cases} 10 - x \geq 0, \\ x - 3 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 10, \\ x > 3. \end{cases} \quad \text{Неравенство } 3 < x \leq 10$$

имеет 7 целых решений: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Ответ: 7.

Алгебраические дроби

① Немного полезной информации

Алгебраическая дробь — это дробь, в числителе и знаменателе которой стоят алгебраические выражения. Все действия с алгебраическими дробями производятся по тем же правилам, что и с числовыми дробями.

8 ➤ Задачи с решениями

10. Упростите выражение $\left(\frac{1}{m-n} + \frac{1}{m+n}\right) : \frac{m}{m^2-n^2}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{m-n} + \frac{1}{m+n}\right) : \frac{m}{m^2-n^2} &= \frac{m+n+m-n}{(m-n)(m+n)} \cdot \frac{m^2-n^2}{m} = \\ &= \frac{2m}{m^2-n^2} \cdot \frac{m^2-n^2}{m} = \frac{2m \cdot (m^2-n^2)}{(m^2-n^2) \cdot m} = 2. \end{aligned}$$

Ответ: 2.

Степень с целым показателем

① Немного полезной информации

Пусть n — натуральное число. Тогда по определению

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ множителей}}$$

Например, $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$; $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$;
 $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$; $7^1 = 7$; $0^8 = 0 \cdot 0 \cdot \dots \cdot 0 = 0$.

Пусть $n = 0$, $a \neq 0$, тогда $a^0 = 1$.

Например, $5^0 = 1$, $(-45)^0 = 1$, $(0,7)^0 = 1$.

Запись 0^0 считается не имеющей смысла.

Пусть n — натуральное число, $a \neq 0$, тогда $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

$$\text{Например, } 4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{1}{64};$$

$$(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}.$$

Запись 0^{-n} считается не имеющей смысла.

Свойства степени с целым показателем:

$$a^m a^n = a^{m+n};$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n};$$

$$(ab)^n = a^n b^n;$$

$$(a^m)^n = a^{mn};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n,$$

если $a \neq 0$ и $b \neq 0$.

🔑 Задачи с решениями

11. Упростите выражение $(2a)^{-5} \cdot (4a)^5$.

Решение.

$$\begin{aligned} (2a)^{-5} \cdot (4a)^5 &= 2^{-5} \cdot a^{-5} \cdot 4^5 \cdot a^5 = \frac{1}{2^5} \cdot 4^5 \cdot a^{-5+5} = \\ &= \left(\frac{4}{2}\right)^5 \cdot a^0 = 2^5 \cdot 1 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32. \end{aligned}$$

Ответ: 32.

12. Упростите выражение $\frac{60a^{-6} \cdot a^3}{a^{-2}}$ и найдите его значение при $a = 15$.

Решение.

$$\frac{60a^{-6} \cdot a^3}{a^{-2}} = 60a^{-6+3-(-2)} = 60a^{-1} = \frac{60}{a}. \text{ При } a = 15 \text{ по-}$$

$$\text{лучаем } \frac{60}{a} = \frac{60}{15} = 4.$$

Ответ: 4.

13. Упростите выражение $\left(\frac{x}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{x^2}{9}\right)^{-4}$ и найдите его значение при $x = 21$.

Решение.

$$\left(\frac{x}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{x^2}{9}\right)^{-4} = \left(\frac{x}{3}\right)^{10} \cdot \left(\left(\frac{x}{3}\right)^2\right)^{-4} = \left(\frac{x}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^{-8} = \left(\frac{x}{3}\right)^2.$$

$$\text{При } x = 21 \text{ получаем } \left(\frac{21}{3}\right)^2 = 7^2 = 49.$$

Ответ: 49.

Тождества

① Немного полезной информации

Тождество — равенство, справедливое при любых допустимых значениях входящих в него переменных.

Например, тождествами являются равенства

$$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2); \quad \frac{a + b}{a^2 + 2ab + b^2} = \frac{1}{a + b}.$$

С тождеством можно выполнять равносильные преобразования: прибавлять одно и то же число (или выражение) к обеим частям, вычитать из обеих частей одно и то же число (или выражение), умножать или делить обе части на одно и то же ненулевое число (или выражение).

Например, из формулы площади параллелограмма $S = ah$ (где a — основание, h — высота) можно выразить высоту h , разделив обе части равенства на длину основания a : $h = \frac{S}{a}$.

Пусть величины в обеих частях равенства неотрицательны. Тогда равносильными будут ещё два преобразования: возведение в квадрат обеих частей равенства и извлечение квадратного корня из обеих частей равенства.

Например, из формулы площади квадрата $S = a^2$ можно выразить длину a его стороны: $\sqrt{S} = \sqrt{a^2}$, откуда $a = \sqrt{S}$.

При применении равносильных преобразований к тождественному равенству мы снова получаем тождественное равенство.

14. Определите, какое из приведённых ниже выражений тождественно равно выражению $(a - b)(2 - c)$.

1) $-(b - a)(c - 2)$

2) $(2 - c)(b - a)$

3) $(c - 2)(b - a)$

4) $-(a + b)(2 + c)$

Решение.

Определим, какие из указанных выражений можно преобразовать к виду $(a - b)(2 - c)$.

1) $-(b - a)(c - 2) = (a - b)(c - 2) \neq (a - b)(2 - c);$

2) $(2 - c)(b - a) = (b - a)(2 - c) \neq (a - b)(2 - c);$

3) $(c - 2)(b - a) = (2 - c)(a - b) = (a - b)(2 - c);$

4) $-(a + b)(2 + c) = (-a - b)(2 + c) \neq (a - b)(2 - c).$

Таким образом, только выражение №3 тождественно равно выражению $(a - b)(2 - c)$.

Ответ: 3.