§ 15. Решение квадратных неравенств. Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля. Системы неравенств

Основные сведения

Квадратным неравенством с одной переменной x называют неравенство вида $ax^2+bx+c>0$, где a, b, c — действительные числа, $a\neq 0$.

Любой член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком (не меняя при этом знака неравенства).

Если обе части неравенства с переменной x умножить или разделить на одно и то же выражение $p(x)$, положительное **при всех значениях** x, и сохранить знак исходного неравенства, то получится неравенство, равносильное данному.

Если обе части неравенства с переменной x умножить или разделить на одно и то же выражение $p(x)$, отрицательное **при всех значениях** x, и изменить знак исходного неравенства на противоположный, то получится неравенство, равносильное данному.

Квадратный трёхчлен ax^2+bx+c с отрицательным дискриминантом при всех значениях x имеет знак старшего коэффициента a.

Модуль вещественного аргумента $|x|=\begin{cases} x, & \text{если } x\geqslant 0,\\ -x, & \text{если } x<0.\end{cases}$

Основные свойства модуля.

$|a|\geqslant 0$

$|a|=|-a|$ $\qquad$ $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|},\ b\neq 0$

$|ab|=|a|\cdot|b|$ $\qquad$ $|a+b|\leqslant|a|+|b|$

$|a|^2=a^2$ $\qquad$ $|a-b|\geqslant|a|-|b|$

Решением неравенства $|x|<b$ являются значения x, удовлетворяющие неравенству $-b<x<b$.

Решением неравенства $|x|>b$ являются значения x, удовлетворяющие совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} x<-b,\\ x>b.\end{array}\right.$

Некоторые **методы решения** уравнений и неравенств, содержащих модуль:

1) **Общий метод**. Разобьём числовую ось точками, в которых обращаются в ноль выражения, стоящие под знаком модуля. Решаем неравенства на каждом из полученных промежутков.

2) **Метод возведения в квадрат**. $|f(x)| = g(x)$ равносильно системе
$$\begin{cases} f^2(x) = g^2(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

3) **Метод замены**. $af^2(x) + b|f(x)| + c > 0 \Leftrightarrow a|f(x)|^2 + b|f(x)| + c > 0$.
Замена: $t = |f(x)|, t \geqslant 0, \Leftrightarrow at^2 + bt + c > 0$.