Демонстрационный вариант

1. При каких значениях x верно неравенство $x^2 + x - 6 < 0$?

Решение. $x^2 + x - 6 < 0$. Решим неравенство методом интервалов (см. рис. 49).

$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = 2. \end{array}\right.$

$(x+3)(x-2) < 0$

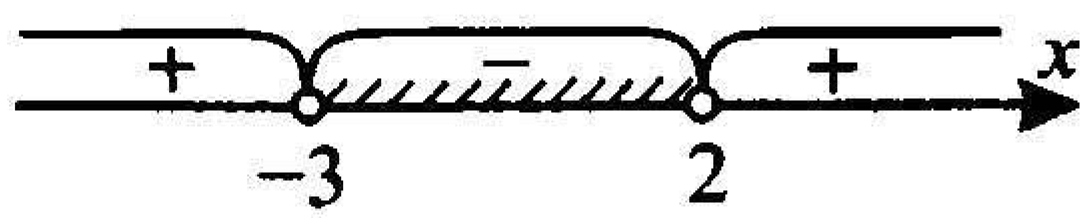

Рис. 49.

Следовательно, $x \in (-3; 2)$.

Ответ: $(-3; 2)$.

2. Решите неравенство $|x + 3| \geqslant 2$.

1) $(-\infty; -5] \cup [-1; +\infty)$ 2) $[-1; 5]$

3) $[-5; -1]$ 4) $(-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$

Решение. $|x + 3| \geqslant 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 3 \geqslant 2, \\ x + 3 \leqslant -2; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geqslant -1, \\ x \leqslant -5 \end{array}\right.$

(см. «Основные сведения» к параграфу).

Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

3. При каком наименьшем натуральном значении x значение квадратного трёхчлена $-4x^2 + x + 1$ меньше соответствующих значений двучлена $2 - 4x$?

Решение. Задача сводится к нахождению наименьшего натурального x, удовлетворяющего неравенству $-4x^2 + x + 1 < 2 - 4x \Leftrightarrow 4x^2 - 5x + 1 > 0$. Решим неравенство методом интервалов.

$$4x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = \dfrac{1}{4}. \end{array}\right.$$

Неравенство примет вид $4\left(x - \dfrac{1}{4}\right)\left(x - 1\right) > 0$. Отметим на числовой оси значения $x = \dfrac{1}{4}$ и $x = 1$ (см. рис. 50) и выберем соответствующие решения.

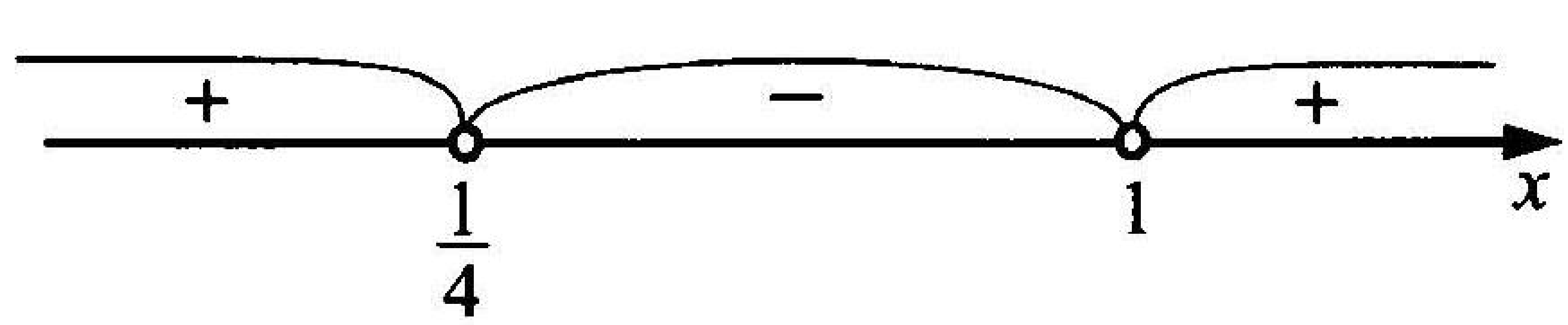

Рис. 50.

Согласно рисунку находим $x \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right) \cup (1; \infty)$. Следовательно, наименьшим натуральным x, удовлетворяющим условию задачи, является 2.

Ответ: 2.

4. Найдите количество целочисленных решений неравенства $\dfrac{x^2 - 15x + 50}{x^2 + 3x + 7} \leqslant 0$.

Решение. Разложим числитель и знаменатель дроби (если это возможно) на линейные множители.

$x^2 - 15x + 50 = 0$, $x_1 = 5$ и $x_2 = 10$ — корни уравнения.

$x^2 + 3x + 7 = 0$, $D = 9 - 4 \cdot 7 < 0$, действительных корней нет. Учитывая, что старший коэффициент уравнения $a = 1$, $a > 0$, имеем $x^2 + 3x + 7 > 0$ при любом значении x.

Исходное неравенство равносильно неравенству $(x-5)(x-10) \leqslant 0$.

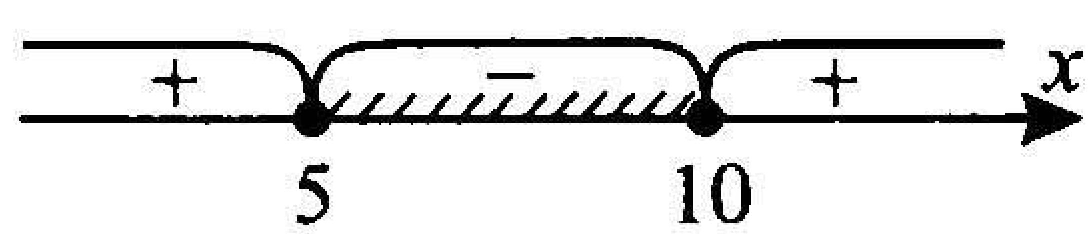

Рис. 51.

Получаем $5 \leqslant x \leqslant 10$. Промежуток $[5; 10]$ содержит 6 целых чисел, значит, неравенство имеет 6 целочисленных решений.

Ответ: 6.

5. Решите неравенство $|2x - 4| < 6$.

Решение. Данное неравенство равносильно двойному неравенству $-6 < 2x - 4 < 6 \Leftrightarrow -6 + 4 < 2x < 6 + 4 \Leftrightarrow -2 < 2x < 10 \Leftrightarrow -1 < x < 5$.

Ответ: $(-1; 5)$.

6. Решите неравенство $\dfrac{x-7}{x+3} \geqslant 1$.

Решение. $\dfrac{x-7}{x+3} \geqslant 1 \Leftrightarrow \dfrac{x-7}{x+3} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x - 7 - x - 3}{x+3} \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{10}{x+3} \leqslant 0 \Leftrightarrow x < -3$.

Ответ: $(-\infty; -3)$.

7. На рисунке 52 изображены графики функций $y = 2 - |x|$ и $y = |x| - 3$.

Используя рисунок, решите систему неравенств $\begin{cases} 2 - |x| > 0, \\ |x| - 3 < 0. \end{cases}$

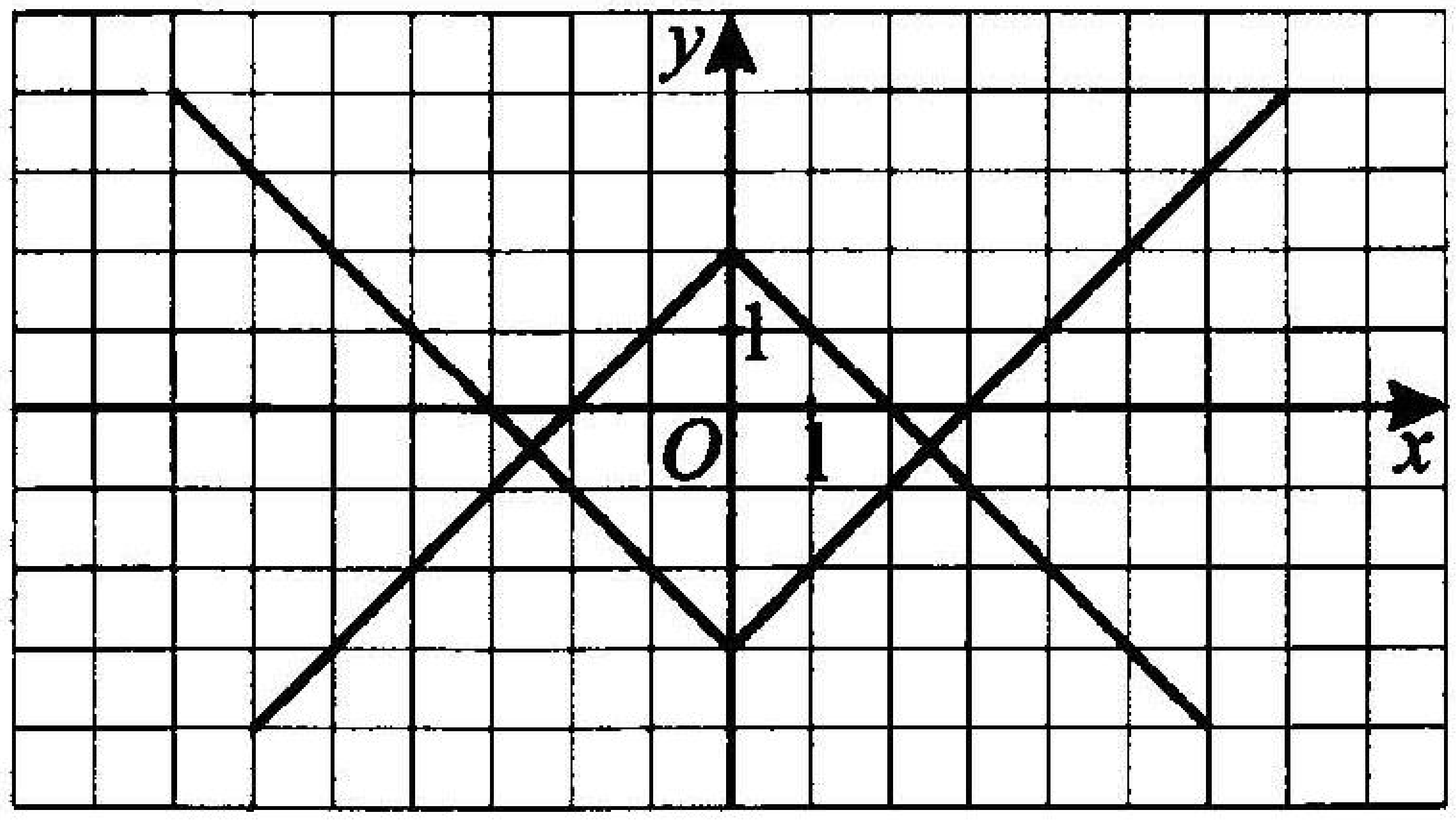

Рис. 52.

1) $(-2{,}5; 2{,}5)$ 2) $(-2; 2)$ 3) $(-3; -2) \cup (2; 3)$ 4) $(-3; 3)$

Решение. По рисунку находим множество решений каждого неравенства.

1) $2 - |x| > 0,\ x \in (-2; 2)$.

2) $|x| - 3 < 0,\ x \in (-3; 3)$.

Решением системы будут те значения переменной, которые удовлетворяют каждому неравенству.

Следовательно, $x \in (-2; 2)$. Из предложенных вариантов ответов верным является 2).

Ответ: 2.

8. Решите систему неравенств $\begin{cases} \left|\dfrac{x+3}{2x-3}\right| > 1, \\ \dfrac{x+3}{2} - \dfrac{x+4}{3} \geqslant 1. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} \left|\dfrac{x+3}{2x-3}\right| > 1, \\ \dfrac{x+3}{2} - \dfrac{x+4}{3} \geqslant 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dfrac{x+3}{2x-3} < -1, \\ \dfrac{x+3}{2x-3} > 1, \end{array} \right. \\ 3(x+3) - 2(x+4) \geqslant 6; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dfrac{x+3+2x-3}{2x-3} < 0, \\ \dfrac{x+3-2x+3}{2x-3} > 0, \end{array} \right. \\ 3x+9-2x-8 \geqslant 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dfrac{3x}{2x-3} < 0, \\ \dfrac{6-x}{2x-3} > 0, \end{array} \right. \\ x \geqslant 5; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{x-1{,}5} < 0, \\[2ex] \dfrac{x-6}{x-1{,}5} < 0, \end{array} \right. \\ x \geqslant 5; \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 0 < x < 1{,}5, \\ 1{,}5 < x < 6, \end{array} \right. \\ x \geqslant 5; \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow 5 \leqslant x < 6.$$

Ответ: $[5; 6)$.